1. On pose $g(x) \overset{\text{def}}{=} f(x) - x = 4 - \frac{1}{4}\ln x - x$

g est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ (somme de fonctions qui le sont) et $\forall x > 0$, $g'(x) = -\frac{1}{4}x - 1 = -\frac{x+4}{4} < 0$

x	0		α		$+\infty$
g	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

g est continue et strictement décroissante de $]0,+\infty[$ vers $g(]0,+\infty[) = \mathbb{R}$.

Elle est donc bijective de $]0,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$.

Comme $0 \in \mathbb{R}$: $\exists!\, \alpha > 0,\ g(\alpha) = 0$.

$\boxed{\text{Donc l'équation } f(x) = x \text{ a une unique solution } \alpha > 0.}$

$g(3) = 1 - \frac{1}{4}\ln 3 > 0 = g(\alpha)$

$g(4) = -\frac{1}{4}\ln 4 < 0 = g(\alpha)$

Comme g est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$:

$3 < \alpha$ et $4 > \alpha$

ie $\boxed{\alpha \in]3,4[}$

2. De même f est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$

et $\forall x > 0$, $f'(x) = -\frac{1}{4x}$

x	0		$+\infty$
f	$\|\|$	$+\infty \searrow$	$-\infty$

$f(3) = 4 - \frac{1}{4}\ln 3 \in]3,4[$

$f(4) = 4 - \frac{1}{4}\ln 4 \in]3,4[$

donc $3 < f(4) < f(3) < 4$

donc $]f(4), f(3)[\subseteq]3,4[$

Comme f strict décroissante et continue :

$$f(]3,4[) =]f(4), f(3)[\subseteq]3,4[$$

Donc $\boxed{]3,4[\text{ est stable par } f}$

De plus $\boxed{\text{si } x \in]3,4[,\ |f'(x)| = \frac{1}{4x} \leq \frac{1}{12}}$ car $x > 3$

3. (x_n) est bien définie et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in]3,4[$ puisque $]3,4[$ est stable par f.

Comme f est dérivable sur $]3,4[$ et comme

$\forall x \in]3,4[$, $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{12}$

l'inégalité des accroissements finis donne :

$\forall (x,y) \in]3,4[^2$, $|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{1}{12}|x-y|$

Comme x_n et α sont $]3,4[$:

$|f(x_n) - f(\alpha)| \leq \dfrac{1}{12}|x_n - \alpha|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

ie $|x_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{12}|x_n - \alpha|$

Par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{12^n}|x_0 - \alpha|$

Comme $\dfrac{1}{12^n}|x_0 - \alpha| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

on a par encadrement : $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha$