1. $x_1 + x_n = 0 \iff \begin{cases} x_1 = -x_n \\ x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n \text{ quelconques} \end{cases}$

Donc $\mathbb{E} = \mathrm{Vect}\Big(\underset{e_2}{(0,1,0,\dots,0)}, \underset{e_3}{(0,0,1,0,\dots,0)}, \dots, \underset{e_{n-1}}{(0,\dots,0,1,0)}, \underset{e_n - e_1}{(-1,0,\dots,0,1)}\Big)$

Donc $\mathbb{E}$ sev de $\mathbb{K}^n$.

La famille $(e_2, e_3, \dots, e_{n-1}, e_n - e_1)$ est de coordonnées échelonnées (par la droite) dans la base canonique : elle est donc libre.

Donc la famille $(e_2, e_3, \dots, e_{n-1}, e_n - e_1)$ est une base de $\mathbb{E}$.

2. $\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ \vdots \\ x_{n-1} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 \text{ qcq} \\ x_2 = \dots = x_{n-1} = 0 \\ x_n \text{ qcq} \end{cases}$

Donc $\mathbb{E} = \mathrm{Vect}\Big(\underset{e_1}{(1,0,\dots,0)}, \underset{e_n}{(0,\dots,0,1)}\Big)$

Donc $\mathbb{E}$ sev de $\mathbb{K}^n$.

Comme e_1 et e_n sont non colinéaires : (e_1, e_n) est une base de $\mathbb{E}$.

3. Si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n$ alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \cdot 2^n$

Donc $\mathbb{E} = \left\{ (u_0 \cdot 2^n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} ;\ u_0 \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left((2^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$

Donc $\mathbb{E}$ sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Comme $(2^n)_{n\in\mathbb{N}} \neq (0)_{n\in\mathbb{N}}$: $\left((2^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ base de $\mathbb{E}$

4. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

$z^2 = z + 1$ donne $z = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Donc $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu \cdot \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

On pose $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Alors $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = -\dfrac{1}{\varphi}$ (φ : nombre d'or)

Donc $E = \left\{ \lambda \cdot (\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu \cdot \left(\left(\dfrac{-1}{\varphi}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}} ;\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

$E = \mathrm{Vect}\left((\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}}, \left(\left(\dfrac{-1}{\varphi}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \right)$

Donc E <u>sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$</u>

Comme les suites $(\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\left(\dfrac{-1}{\varphi}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont pas colinéaires :

la famille $\left((\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}}, \left(\left(\dfrac{-1}{\varphi}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \right)$ est <u>une base de E</u>.

5. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$

$z^2 = -z - 1$ donne $z = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} = e^{\pm i \frac{2\pi}{3}}$

Donc $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda \cdot \cos\left(n \dfrac{2\pi}{3}\right) + \mu \cdot \sin\left(n \cdot \dfrac{2\pi}{3}\right)$

Donc $E = \mathrm{Vect}\left(\left(\cos\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(\sin\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \right)$

Donc E <u>sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$</u>.

Comme les suites $\left(\cos\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\sin\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont non colinéaires : la famille $\left(\left(\cos\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(\sin\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \right)$ est <u>une base de E</u>.

Rem : Pour $\mathbb{F} = \{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} ;\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n \}$

$z^2 = -z - 1$ donne $z = j$ ou $\bar{j}$

donc $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 ;\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda . j^n + \mu . (\bar{j})^n$

Donc $\mathbb{F} = \mathrm{Vect}\left((j^n)_{n\in\mathbb{N}}, (\bar{j}^n)_{n\in\mathbb{N}} \right)$

Donc $\mathbb{F}$ sev de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Comme les suites $(j^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\bar{j}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont non colinéaires :

la famille $\left((j^n)_{n\in\mathbb{N}}, (\bar{j}^n)_{n\in\mathbb{N}} \right)$ est une base de $\mathbb{F}$.

6. $\mathbb{E} = \mathrm{Vect}(X^2+1)$ donc $\mathbb{E}$ sev de $\mathbb{K}[X]$

Comme $X^2+1 \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$: la famille (X^2+1) est une base de $\mathbb{E}$

7. $\mathbb{E} = \{ a(X^4+X) + bX \in \mathbb{K}[X] ;\ (a,b) \in \mathbb{K}^2 \}$

donc $\mathbb{E} = \mathrm{Vect}(X^4+X, X)$ donc $\mathbb{E}$ sev de $\mathbb{K}[X]$.

Comme X^4+X et X sont non colinéaires : (X^4+X, X) est une base de $\mathbb{E}$

8. $\mathbb{E} = \{ a(X^3+X^2+4) + b(X^2-3) + c(-X^3+X) \in \mathbb{K}[X] ;\ (a,b,c) \in \mathbb{K}^3 \}$

donc $\mathbb{E} = \mathrm{Vect}(\underbrace{X^3+X^2+4}_{P_1}, \underbrace{X^2-3}_{P_2}, \underbrace{-X^3+X}_{P_3})$ donc $\mathbb{E}$ sev de $\mathbb{K}[X]$

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{K}^3$ tq $\lambda_1 . P_1 + \lambda_2 . P_2 + \lambda_3 . P_3 = 0_{\mathbb{K}[X]}$

Alors $(\alpha_1-\alpha_3)X^3+(\alpha_1+\alpha_2)X^2+\alpha_3X+(4\alpha_1-3\alpha_2)=0_{\mathbb{K}[X]}$ (4)

donc $\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1+\alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ 4\alpha_1-3\alpha_2 = 0 \end{cases}$ donc $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$

Donc la famille (P_1, P_2, P_3) est libre.

Donc la famille (P_1, P_2, P_3) est une base de E.

9. $E=\{aX^3+bX^2+cX \in \mathbb{K}[X] ; (a,b,c)\in\mathbb{K}^3\}$

donc $E = \mathrm{Vect}(X^3, X^2, X)$ donc E sev de $\mathbb{K}[X]$.

La famille (X^3, X^2, X) est libre car formée de polynômes non nuls de degrés échelonnés.

Donc la famille (X^3, X^2, X) est une base de E.

10. $E=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c\end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K}) ; (a,b,c)\in\mathbb{K}^3\right\}$

Donc $E = \mathrm{Vect}\Big(\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}_{I}, \underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}}_{E_{12}}, \underbrace{\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}}_{E_{21}}\Big)$ donc E sev de $M_2(\mathbb{K})$.

Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\in\mathbb{K}^3$ tq $\alpha_1 . I + \alpha_2 . E_{12} + \alpha_3 E_{21} = 0_2$

Alors $\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_1\end{pmatrix} = 0_2$ donc $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$

Donc la famille (I, E_{12}, E_{21}) est libre : elle est donc une base de E.

11. $\mathbb{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})\ ;\ a \in \mathbb{K} \right\}$

donc $\mathbb{E} = \mathrm{Vect}\Big(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{M}\Big)$ donc $\mathbb{E}$ <u>sev de $M_2(\mathbb{K})$</u>.

Comme $M \neq O_2$: la famille (M) est libre et donc elle est <u>une base de $\mathbb{E}$</u>.