1. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^{n-1}$ tq $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k . \varepsilon_k = 0_E$

Alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k . (e_k + e_{k+1}) = 0_E$

ie $\alpha_1 . e_1 + (\alpha_1 + \alpha_2) . e_2 + \dots + (\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1}) e_{n-1} + \alpha_{n-1} . e_n = 0_E$

Comme la famille $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, e_n)$ est libre :

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} = 0 \\ \alpha_{n-1} = 0 \end{cases} \qquad \text{donc } \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$$

Donc $\boxed{\text{la famille } (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}) \text{ est libre}}$.

2. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tq $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k . \varepsilon_k = 0_E$.

Alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k (e_k + e_{k+1}) + \alpha_n . (e_1 + e_n) = 0_E$

ie $(\alpha_1 + \alpha_n) . e_1 + (\alpha_1 + \alpha_2) e_2 + \dots + (\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1}) e_{n-1} + (\alpha_{n-1} + \alpha_n) e_n = 0_E$

Comme la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre on a :

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_n = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} = 0 \\ \alpha_{n-1} + \alpha_n = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_n = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_n = 0 \\ \alpha_3 + \alpha_n = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} + (-1)^n \alpha_n = 0 \\ \alpha_{n-1} + \alpha_n = 0 \end{cases}$$

en effectuant dans cet ordre les opérations :

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$\vdots$

$L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2}$

On effectue une dernière opération : $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}$

$$\begin{cases} \alpha_1 \qquad\qquad + \alpha_n = 0 \\ \quad \ddots \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\quad \alpha_{n-1} + (-1)^n \alpha_n = 0 \\ \qquad\qquad (1-(-1)^n)\alpha_n = 0 \end{cases}$$

Si n pair : $1-(-1)^n = 0$ donc le système est de rang $n-1$.

Comme il a n inconnues : il a une infinité de solutions.

Donc la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est liée.

Si n impair : $1-(-1)^n = 2$

on obtient $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

donc la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est libre.