1) $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel usuel (exemple du cours).

On a $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Comme $\mathbb{F} = \text{Vect}(\cos, \sin)$ on sait que $\mathbb{F}$ est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

donc $\mathbb{F}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Si $f = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$ alors $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(\pi) = 0$

donc $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}} \in \mathbb{E}$ donc $\mathbb{E} \neq \emptyset$.

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(f, g) \in \mathbb{E}^2$:

$$f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(\pi) \text{ et } g(0) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = g(\pi)$$

donc $\lambda.f(0) + g(0) = \lambda.f\left(\frac{\pi}{2}\right) + g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lambda.f(\pi) + g(\pi)$

donc $\lambda.f + g \in \mathbb{E}$.

Ainsi $\mathbb{E}$ est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et donc $\mathbb{E}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2) On sait déjà que $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont des sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Soit $h \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ fixé.

Analyse. On suppose que $h = f + g$ avec $f \in \mathbb{E}$ et $g \in \mathbb{F}$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = f(x) + g(x)$

$$f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(\pi)$$

$$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = a.\cos x + b.\sin x$$

On a donc $\begin{cases} h(0) = f(0) + a \\ h\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(0) + b \\ h(\pi) = f(0) - a \end{cases}$

$L_1 - L_3$ donc $a = \frac{1}{2}\left(h(0) - h(\pi)\right)$

Donc $f(0) = \frac{1}{2}\left(h(0) + h(\pi)\right)$

puis $b = h\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(h(0) + h(\pi)\right)$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{2}\left(h(0) - h(\pi)\right).\cos x + \left(h\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(h(0) + h(\pi)\right)\right).\sin x$

et : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = h(x) - \frac{1}{2}\left(h(0) - h(\pi)\right)\cos x - \left[h\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(h(0) + h(\pi)\right)\right]\sin x$

Donc si la décomposition de h existe alors elle est unique.

<u>Synthese</u>. On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) + g(x) = h(x)$ donc $h = f + g$.

On a $f(0) = h(0) - \frac{1}{2}\left(h(0) - h(\pi)\right) = \frac{1}{2}\left(h(0) + h(\pi)\right)$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(h(0) + h(\pi)\right)$

$f(\pi) = h(\pi) + \frac{1}{2}\left(h(0) - h(\pi)\right) = \frac{1}{2}\left(h(0) + h(\pi)\right)$

donc $f \in \mathbb{E}$.

Et g est CL de cos et sin donc $g \in \mathbb{F}$.

Donc la décomposition de h existe.

<u>Ccl</u> : h a une unique décomposition dans $\mathbb{E} + \mathbb{F}$.

On a donc $\boxed{\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathbb{E} \oplus \mathbb{F}}$