1. $\mathcal{F} = (P_1, P_2, P_3)$

Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ tq $\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

On évalue en 1, 2 et 3 :

$$\begin{cases} \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ 4\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases} \quad \text{donc } \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

Donc $\mathcal{F}$ est une famille libre.

2. $\mathcal{F} = (P_1, P_2, P_3)$

Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ tq $\alpha_1 (X^2+1) + \alpha_2 . 2X + \alpha_3 . (2X^2+X) = 0_{\mathbb{R}[X]}$

Alors $(\alpha_1 + 2\alpha_3) . X^2 + (2\alpha_2 + \alpha_3) X + \alpha_1 = 0_{\mathbb{R}[X]}$

Donc par unicité des coefficients :

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \end{cases} \quad \text{donc } \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

Donc $\mathcal{F}$ est une famille libre.

3. $\mathcal{F}$ est libre car c'est une famille de polynômes non nuls de degrés échelonnés.

4. $\mathcal{F} = (P_1, P_2, P_3)$ est liée car $(X+1)^2 = X^2 + 1 + 2X$

ie $P_3 = P_1 + P_2$

5. $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tq $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 . u_1(x) + \lambda_2 . u_2(x) + \lambda_3 . u_3(x) + \lambda_4 . u_4(x) = 0$

$$\lambda_1 . \cos(x) + \lambda_2 . x . \cos(x) + \lambda_3 . \sin(x) + \lambda_4 . x . \sin(x) = 0$$

En particulier pour $x = 0, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$ et π :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 + \frac{\pi}{2}\lambda_4 = 0 \\ -\lambda_3 + \frac{\pi}{2}\lambda_4 = 0 \\ -\lambda_1 - \pi . \lambda_2 = 0 \end{cases} \quad \text{donc } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

Donc $\mathcal{F}$ est une famille libre.

6. $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ est liée car $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(2x) = 2.\cos^2 x - 1$

ie $u_1 = 2.u_2 - u_3$

7. $\mathcal{F} = (u, v, w)$ est liée car $\forall n \in \mathbb{N}$, $2^{n+1} = 2 \times 2^n$

ie $v = 2.u + 0.w$

8. $\mathcal{F} = (u, v, w)$

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tq $\alpha . u + \beta . v + \gamma . w = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha 2^n + \beta . 3^n + \gamma . n = 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha \left(\frac{2}{3}\right)^n + \beta + \gamma \frac{n}{3^n} = \frac{0}{3^n} = 0$

Si $n \longrightarrow +\infty$: $\beta = 0$

On réinjecte : $\forall n \in \mathbb{N}, \ \alpha 2^n + \gamma . n = 0$

donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \ \alpha + \gamma \frac{n}{2^n} = 0$

Si $n \to +\infty$: $\alpha = 0$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \ \gamma n = 0$

Pour $n=1$: $\gamma = 0$

Donc $\mathcal{F}$ est une famille <u>libre</u>.

<u>9.</u> $\mathcal{F} = (M_1, M_2, M_3)$

Soit $(d_1, d_2, d_3) \in \mathbb{R}^3$ tq $d_1 . M_1 + d_2 . M_2 + d_3 . M_3 = O_2$

Alors $\begin{pmatrix} d_2 - d_3 & d_1 - d_2 - d_3 \\ d_1 + d_2 + d_3 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} = O_2$

Donc $\begin{cases} d_2 - d_3 = 0 \\ d_1 - d_2 - d_3 = 0 \\ d_1 + d_2 + d_3 = 0 \\ d_1 + d_2 = 0 \end{cases}$ donc $d_1 = d_2 = d_3 = 0$

Donc $\mathcal{F}$ est une famille <u>libre</u>.

<u>10.</u> $\mathcal{F} = (M_1, M_2, M_3)$ est <u>liée</u> car $M_1 + M_2 + M_3 = O_2$