1. $\mathbb{E} = \text{Vect}\big(\underset{u_1}{(2,1,0,1)}, \underset{u_2}{(-3,2,-1,0)}, \underset{u_3}{(1,-1,1,0)}\big)$ donc $\mathbb{E}$ sev de $\mathbb{R}^4$

Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 . u_2 + \alpha_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^4}$

Donc $\begin{cases} 2\alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \end{cases}$ donc $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

Donc la famille (u_1, u_2, u_3) est libre.

Donc la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{E}$.

Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Alors :

$(x,y,z,t) \in \mathbb{E} \iff \begin{cases} \boxed{2a} - 3b + c = x \\ a + 2b - c = y \\ -b + c = z \\ a = t \end{cases}$ compatible

$\iff \begin{cases} \boxed{2a} - 3b + c = x \\ 7b - 3c = 2y - x & L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ \boxed{-b} + c = z \\ 3b - c = 2t - x & L_4 \leftarrow 2L_4 - L_1 \end{cases}$

est compatible

$\underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\iff} \begin{cases} \boxed{2a} - 3b + c = x \\ \boxed{-b} + c = z \\ \boxed{4c} = 2y - x + 7z & L_3 \leftarrow L_3 + 7L_2 \\ 2c = 2t - x + 3z & L_4 \leftarrow L_4 + 3L_2 \end{cases}$

est compatible

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \boxed{2a} - 3b + c = x \\ \boxed{-b} + c = z \\ \boxed{4c} = 2y - x + 7z \\ 0 = 4t - x - 2y - z \quad L_4 \leftarrow 2L_4 - L_3 \end{cases}$$

est compatible

$$\Longleftrightarrow \quad x + 2y + z - 4t = 0$$

Donc $\mathbb{E} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 ;\ x + 2y + z - 4t = 0\}$

2. $\mathbb{E} = \mathrm{Vect}(\underbrace{(1,1,-2)}_{u_1}, \underbrace{(-1,1,-1)}_{u_2}, \underbrace{(0,2,-3)}_{u_3})$ donc $\mathbb{E}$ sev de $\mathbb{R}^3$

Comme $u_3 = u_1 + u_2$: $\mathbb{E} = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$

Comme u_1 et u_2 non colinéaires : (u_1, u_2) est une base de $\mathbb{E}$.

Donc $\mathbb{E} = \{(a-b, a+b, -2a-b) \in \mathbb{R}^3 ;\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$(x,y,z) \in \mathbb{E} \Longleftrightarrow \begin{cases} \boxed{a} - b = x \\ a + b = y \\ -2a - b = z \end{cases} \text{ est compatible}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \boxed{a} - b = x \\ \boxed{2b} = y - x \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -3b = z + 2x \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{cases} \text{ est compatible}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \boxed{a} - b = x \\ \boxed{2b} = y - x \\ 0 = 2z + 3y + x \quad L_3 \leftarrow 2L_3 + 3L_2 \end{cases} \text{ est compatible}$$

$$\Longleftrightarrow \quad x + 3y + 2z = 0$$

$\mathbb{E} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ x + 3y + 2z = 0\}$

<u>3.</u> $\mathbb{E} = \mathrm{Vect}(\underbrace{(1,2,-1,0)}_{u_1}, \underbrace{(0,1,3,-1)}_{u_2})$ donc <u>$\mathbb{E}$ sev de $\mathbb{R}^4$</u>

Comme u_1 et u_2 non colinéaires : (u_1, u_2) est une <u>base</u> de $\mathbb{E}$

$\mathbb{E} = \{(a, 2a+b, -a+3b, -b) \in \mathbb{R}^4 ;\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$

Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. Alors :

$$(x,y,z,t) \in \mathbb{E} \iff \begin{cases} \boxed{a} = x \\ 2a + b = y \\ -a + 3b = z \\ -b = t \end{cases} \text{ est compatible}$$

$$\iff \begin{cases} \boxed{a} = x \\ \boxed{b} = y - 2x & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 3b = z + x & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ -b = t \end{cases} \text{ est compatible}$$

$$\iff \begin{cases} \boxed{a} = x \\ \boxed{b} = y - 2x \\ 0 = z - 3y + 7x & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \\ 0 = y - 2x + t & L_4 \leftarrow L_4 + L_3 \end{cases} \text{ est compatible}$$

$$\iff 7x - 3y + z = -2x + y + t = 0$$

Donc $\mathbb{E} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 ;\ 7x - 3y + z = -2x + y + t = 0\}$

<u>4.</u> $\mathbb{E} = \mathrm{Vect}(\underbrace{(2,-1,0)}_{u_1}, \underbrace{(1,3,-1)}_{u_2}, \underbrace{(1,-4,1)}_{u_3})$ donc <u>$\mathbb{E}$ sev de $\mathbb{R}^3$</u>

$u_1 = u_2 + u_3$ donc $\mathbb{E} = \mathrm{Vect}(u_2, u_3)$

Comme u_2 et u_3 non colinéaires : (u_2, u_3) est <u>une base de $\mathbb{E}$</u>

Donc $E = \{(a+b, 3a-4b, -a+b) \in \mathbb{R}^3 ; (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$(x,y,z) \in E \iff \begin{cases} \boxed{a}+b = x \\ 3a-4b = y \\ -a+b = z \end{cases}$ est compatible

$\iff \begin{cases} \boxed{a}+b = x \\ \boxed{-7b} = y-3x \\ 2b = z+x \end{cases}$ est compatible

$\iff \begin{cases} \boxed{a}+b = x \\ \boxed{-7b} = y-3x \\ 0 = 7z+2y+x \end{cases}$ est compatible

$\iff x+2y+7z=0$

Donc $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x+2y+7z=0\}$