* $\mathbb{F} = \{ a_3X^3 + a_4X^4 + \dots + a_nX^n \in \mathbb{R}_n[X] ; (a_3, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n-2} \}$
$= \text{Vect}(X^3, X^4, \dots, X^n)$

donc $\mathbb{F}$ est un <u>sev de $\mathbb{R}_n[X]$</u>

De plus la famille $(X^3, X^4, \dots, X^n)$ est libre (sous-famille de la base canonique) donc elle est une <u>base de $\mathbb{F}$</u>.

Donc $\boxed{\dim \mathbb{F} = n-2}$

* $\mathbb{G}$ est un <u>sev de $\mathbb{R}_n[X]$</u> engendré par la famille $(\underset{P_1}{X(X-1)}, \underset{P_2}{(X-1)(X-2)}, \underset{P_3}{X(X-2)})$.

On montre facilement que la famille (P_1, P_2, P_3) est libre. Elle est donc une <u>base de $\mathbb{G}$</u>

Donc $\boxed{\dim(\mathbb{G}) = 3}$

* On a $\dim(\mathbb{F}) + \dim(\mathbb{G}) = (n-2) + 3 = n+1$
$= \dim(\mathbb{R}_n[X])$

* Si $Q \in \mathbb{F} \cap \mathbb{G}$.
Alors $\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 ; Q = aX(X-1) + b(X-1)(X-2)$
$+ cX(X-2)$

donc $Q(X) = (a+b+c)X^2 + (-a+2b-2c)X + 2b$

Comme $X^3 \mid Q$ on sait que 0 est racine de Q d'ordre de multiplicité au moins 3 et donc que $Q(0) = Q'(0) = Q''(0) = 0$.

Donc $\begin{cases} 2b = 0 \\ -a+2b-2c = 0 \\ 2(a+b+c) = 0 \end{cases}$ donc $a = b = c = 0$

Donc $Q = 0_{\mathbb{R}[X]}$

Donc $\mathbb{F} \cap \mathbb{G} \subseteq \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$

Comme $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont des sev de $\mathbb{R}[X]$ on a :

$$\mathbb{F} \cap \mathbb{G} = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$$

* D'après le th de caractérisation des sev supplémentaires en dim finie : $\boxed{\mathbb{R}_n[X] = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}}$