Pour $n \in \mathbb{N}$ on note H_n le prédicat

" la famille $(x \mapsto 1, x \mapsto e^x, x \mapsto e^{2x}, \dots, x \mapsto e^{nx})$

est libre "

<u>Pour $n = 0$</u> la famille $(x \mapsto 1)$ est libre car formée

d'un vecteur non nul. Donc H_0 est vrai.

<u>Hérédité</u> Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tq H_n est vrai.

<u>but</u> H_{n+1} est vrai.

Pour $k \in [\![0, n+1]\!]$ on definit la fonction $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_k(x) = e^{kx}$

Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ réels tq $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k \cdot f_k = 0_{\mathbb{R}^\mathbb{R}}$

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\alpha_0 + \alpha_1 e^x + \dots + \alpha_n e^{nx} + \alpha_{n+1} e^{(n+1)x} = 0$

Si $\alpha_{n+1} \neq 0$: $\alpha_0 + \alpha_1 e^x + \dots + \alpha_n e^{nx} + \alpha_{n+1} e^{(n+1)x} \underset{x \to +\infty}{\sim} \alpha_{n+1} e^{(n+1)x}$

donc $\alpha_0 + \alpha_1 e^x + \dots + \alpha_{n+1} e^{(n+1)x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \pm\infty$

c'est absurde car c'est la fonction nulle

Donc $\alpha_{n+1} = 0$.

On le réinjecte : $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \cdot f_k = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$

D'après H_n la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est libre

donc $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

On a donc $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = \alpha_{n+1} = 0$

Donc la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n, f_{n+1})$ est libre.

Donc H_{n+1} est vrai.

<u>ccl</u> H_n est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ contient des familles libres aussi grandes qu'on veut.

D'après le cor 5 on a $\dim\left(C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})\right) = +\infty$

<u>Rem</u> Il en est donc de même pour $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui sont encore "plus gros".