Si $f \in \mathbb{F}_\alpha$ alors f est de la forme :

$$f : x \longmapsto P(x)e^{\alpha x} + Q(x)e^{-\alpha x} \quad \text{avec } (P,Q) \in \mathbb{R}_1[X]^2$$

donc de la forme :

$$f : x \longmapsto (ax+b)e^{\alpha x} + (cx+d)e^{-\alpha x}$$

ie :

$$f : x \longmapsto axe^{\alpha x} + be^{\alpha x} + cxe^{-\alpha x} + de^{-\alpha x}$$

$$\text{où } (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$$

Donc $\mathbb{F}_\alpha = \mathrm{Vect}\left(\underbrace{x \mapsto xe^{\alpha x}}_{f_1}, \underbrace{x \mapsto e^{\alpha x}}_{f_2}, \underbrace{x \mapsto xe^{-\alpha x}}_{f_3}, \underbrace{x \mapsto e^{-\alpha x}}_{f_4}\right)$

1. $\mathbb{F}_\alpha$ est donc un sev de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$
et donc $\mathbb{F}_\alpha$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

2. Et $\dim(\mathbb{F}_\alpha) \leqslant 4$.

La famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est-elle libre ?

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ réels tels que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0_{\mathbb{R}^\mathbb{R}}$

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 xe^{\alpha x} + \lambda_2 e^{\alpha x} + \lambda_3 xe^{-\alpha x} + \lambda_4 e^{-\alpha x} = 0$

Pour $x > 0$ on divise par $xe^{\alpha x}$ (fonction qui nous semble prépondérante) :

$$\forall x > 0, \; d_1 + \frac{d_2}{x} + d_3 e^{-2\alpha x} + \frac{d_4}{x} e^{-2\alpha x} = 0$$

Or $\quad d_1 + \frac{d_2}{x} + d_3 e^{-2\alpha x} + \frac{d_4}{x} e^{-2\alpha x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} d_1$

Par unicité de la limite : $\underline{d_1 = 0}$

On le réinjecte :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; d_2 e^{\alpha x} + d_3 x e^{-\alpha x} + d_4 e^{-\alpha x} = 0$$

De même on divise par $e^{\alpha x}$ et on fait $x \to +\infty$

et on trouve $\underline{d_2 = 0}$.

On arrive à $\quad d_3 f_3 + d_4 f_4 = 0_{\mathbb{R}^\mathbb{R}}$

Comme f_3 et f_4 sont non colinéaires : $\quad \underline{d_3 = d_4 = 0}$

Donc la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre et comme elle engendre F_α, elle est <u>une base de F_α</u>.

Donc $\underline{\dim(F_\alpha) = 4}$.