f, g endomorphismes de $\mathbb{E}$

1. * Montrons que $Ker(f) \subseteq Ker(g \circ f)$.

Soit $\vec{x} \in Ker(f)$. Alors $f(\vec{x}) = \vec{0}_E$

Comme g est linéaire : $g(f(\vec{x})) = g(\vec{0}_E) = \vec{0}_E$

Donc $\vec{x} \in Ker(g \circ f)$.

Rem: En particulier $Ker(f) \subseteq Ker(f^2)$.

* Montrons que $Im(g \circ f) \subseteq Im(g)$.

Soit $\vec{y} \in Im(g \circ f)$. Alors $\exists \vec{x} \in \mathbb{E}$, $\vec{y} = g(f(\vec{x}))$

Si on pose $\vec{t} = f(\vec{x})$ alors $\vec{y} = g(\vec{t})$ et $\vec{t} \in \mathbb{E}$

donc $\vec{y} \in Im(g)$.

Rem En particulier $Im(f^2) \subseteq Im(f)$

* Par double-inclusion montrons que $Ker(g) \cap Im(f) = f(Ker(g \circ f))$

$\boxed{\subseteq}$ Soit $\vec{y} \in Ker(g) \cap Im(f)$.

Alors $g(\vec{y}) = \vec{0}_E$ et $\exists \vec{x} \in \mathbb{E}$, $\vec{y} = f(\vec{x})$

On a donc $g(f(\vec{x})) = \vec{0_E}$ donc $\vec{x} \in Ker(g \circ f)$.

Comme $\vec{y} = f(\vec{x})$ on a $\vec{y} \in f(Ker(g \circ f))$

$\boxed{\supseteq}$ Soit $\vec{y} \in f(Ker(g \circ f))$.

Alors $\exists \vec{x} \in Ker(g \circ f)$; $\vec{y} = f(\vec{x})$

En particulier $\vec{x} \in E$ donc $\vec{y} \in Im(f)$.

De plus $\vec{x} \in Ker(g \circ f)$ donc $g(\vec{y}) = g(f(\vec{x})) = \vec{0_E}$

donc $\vec{y} \in Ker(g)$

Ainsi $\vec{y} \in Ker(g) \cap Im(f)$.

2. On suppose que $g \circ f = f \circ g$.

* Montrons que $Ker(g)$ est stable par f ie $\forall \vec{x} \in Ker(g), f(\vec{x}) \in Ker(g)$

Soit $\vec{x} \in Ker(g)$ fixé qcq.

On a $g(f(\vec{x})) = f(g(\vec{x}))$ car $f \circ g = g \circ f$

$= f(\vec{0_E})$ car $x \in Ker(g)$

$= \vec{0_E}$ car f linéaire

Donc $f(\vec{x}) \in \mathrm{Ker}(g)$.

* Montrons que $\mathrm{Im}(g)$ est stable par f.

ie $\forall \vec{y} \in \mathrm{Im}(g),\ f(\vec{y}) \in \mathrm{Im}(g)$

Soit $\vec{y} \in \mathrm{Im}(g)$ fixé qcq.

Alors $\exists \vec{x} \in \mathbb{E} ;\ \vec{y} = g(\vec{x})$

Donc $f(\vec{y}) = f(g(\vec{x}))$

$= g(f(\vec{x}))$ car $f \circ g = g \circ f$

Si on pose $\vec{F} = f(\vec{x})$ on a $\vec{F} \in \mathbb{E}$ et $f(\vec{y}) = g(\vec{F})$

donc $f(\vec{y}) \in \mathrm{Im}(g)$.