Ex15 TD16

1. p et q ont la même image signifie que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(q)$.

On veut montrer que : $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(q) \iff p \circ q = q$ et $q \circ p = p$

$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose que $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Im}\, q$.

Soit $x \in E$. On veut montrer que $p(q(x)) = q(x)$.

On a $q(x) \in \mathrm{Im}(q)$ par def de $\mathrm{Im}\, q$.

Comme $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Im}\, q$ on a donc $q(x) \in \mathrm{Im}(p)$.

Comme $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - id)$ on a donc $p(q(x)) = q(x)$.

De même $p(x) \in \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(q)$ donne $q(p(x)) = p(x)$.

Ceci est vrai pour tout $x \in E$ donc $p \circ q = q$ et $q \circ p = p$

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que $p \circ q = q$ et $q \circ p = p$.

On a donc $\forall x \in E$, $p(q(x)) = q(x)$ et $q(p(x)) = p(x)$

Soit $y \in \mathrm{Im}\, p$. $\exists x \in E$, $y = p(x)$.

Donc $y = q(p(x)) \in \mathrm{Im}\, q$.

Ceci prouve que $\mathrm{Im}\, p \subseteq \mathrm{Im}\, q$. Et de même $\mathrm{Im}(q) \subseteq \mathrm{Im}(p)$.

Donc $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(q)$.

2. p et q ont la même direction $\iff \mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Ker}\, q$

Or $\mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Im}(id_E - p)$ et $\mathrm{Ker}\, q = \mathrm{Im}(id_E - q)$

De plus $id_E - p$ et $id_E - q$ sont des projecteurs de E.

On obtient avec 1. que :

$$\mathrm{Im}(id_E - p) = \mathrm{Im}(id_E - q) \iff (id_E - p) \circ (id_E - q) = id_E - q$$
$$\text{et } (id_E - q) \circ (id_E - p) = id_E - p$$

$\Longleftrightarrow id_E - p - q + p \circ q = id_E - q$ et $id_E - q - p + q \circ p = id_E - p$

$\Longleftrightarrow p = p \circ q$ et $q = q \circ p$

Donc : p et q projettent dans la même direction

$\Longleftrightarrow p = p \circ q$ et $q = q \circ p$