Ex 17 TD16

Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(P,Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2$:

$$\varphi(\alpha P + Q) = (\alpha P(0) + Q(0), \alpha P'(0) + Q'(0), \alpha P(1) + Q(1))$$

$$= \alpha . (P(0), P'(0), P(1)) + (Q(0), Q'(0), Q(1))$$

$$= \alpha . \varphi(P) + \varphi(Q)$$

donc $\underline{\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^3)}$

Si $P = aX^2 + bX + c \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ on a :

$$\varphi(P) = (0,0,0)$$

ie $(c, b, a+b+c) = (0\ 0\ 0)$

donc $a = b = c = 0$ et donc $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

On en déduit que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$.

Par th on sait que φ est injective.

Comme $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ on sait par théorème que

φ est un <u>isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ vers $\mathbb{R}^3$</u>.