TD16 Ex 3 

1. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(u,v) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2$.

$\lambda u + v = (\lambda u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Donc $\varphi(\lambda u + v) = (\lambda u_{n+1} + v_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = \lambda . (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} + (v_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$

$= \lambda . \varphi(u) + \varphi(v)$

Donc $\varphi$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Pour $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ :

$u \in \mathrm{Ker}\,\varphi \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 0 \iff \forall n \geq 1,\ u_n = 0$

$\iff u = (u_0, 0, 0, \dots) = u_0 . (1, 0, \dots)$

On note a la suite définie par $\begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall n \geq 1,\ a_n = 0 \end{cases}$

Alors $\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}(a)}$

Mq $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ie que $\varphi$ est surjective.

Soit $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On cherche $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq $\varphi(u) = v$ ie $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = v_n$.

On choisit $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \geq 1,\ u_n = v_{n-1} \end{cases}$

Il est clair que $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et que $\varphi(u) = v$.

Donc $\boxed{\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$

2. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(u,v) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2$.

$\lambda u + v = (\lambda u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Donc $\Psi(\lambda u + v) = (\lambda u_{n+1} + v_{n+1} - 2\lambda u_n - 2v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$= \lambda . (u_{n+1} - 2u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_{n+1} - 2v_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lambda . \Psi(u) + \Psi(v)$

Donc $\Psi$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Pour $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ :

$u \in \mathrm{Ker}\,\Psi \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - 2u_n = 0$

$\iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 . 2^n$

On note $b$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = 2^n$

Alors $\boxed{\mathrm{Ker}(\Psi) = \mathrm{Vect}(b)}$

Mq $\mathrm{Im}(\Psi) = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\Psi$ surjective.

Soit $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On cherche $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq $\Psi(u) = v$ ie $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - 2u_n = v_n$

Analyse Soit $u$ une solution.

Alors $u_1 = v_0 + 2u_0$

$u_2 = v_1 + 2u_1 = v_1 + 2v_0 + 2^2 u_0$

$u_3 = v_2 + 2u_2 = v_2 + 2v_1 + 2^2 v_0 + 2^3 u_0$

$\vdots$

$u_n = v_{n-1} + 2v_{n-2} + \dots + 2^{n-1} v_0 + 2^n u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k . v_{n-1-k} + 2^n u_0$

et $u_0$ qcq dans $\mathbb{R}$

<u>Synthèse</u> On choisit $u_0 \in \mathbb{R}$

et on pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k . v_{n-1-k} + 2^n u_0$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - 2u_n = v_n + 2v_{n-1} + \cdots + 2^n . v_0 + 2^{n+1} u_0$

$-2v_{n-1} - 2^2 v_{n-2} - \cdots - 2^n v_0 - 2^{n+1} u_0$

$= v_n$

et $u_1 - 2u_0 = v_0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - 2u_n = v_n$.

<u>Conclusion</u> Il existe une infinité de $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq $\Psi(u) = v$ (car $u_0$ qcq)

Donc $\boxed{\mathrm{Im}(\Psi) = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$