1. Si $f \in C^0([0,1];\mathbb{R})$ et $g:[0,1] \to \mathbb{R}$ est définie par : (1)

$$\forall x \in [0,1],\ g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

Alors on sait que $g \in C^1([0,1];\mathbb{R})$

Donc φ est à valeurs dans $C^1([0,1];\mathbb{R})$ (comme dit dans l'"énoncé")

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(f_1, f_2) \in C^0([0,1];\mathbb{R})^2$.

Alors :

$$\forall x \in [0,1],\ \varphi(\lambda f_1 + f_2)(x) = \int_0^x (\lambda . f_1(t) + f_2(t))\,dt$$

$$= \lambda . \int_0^x f_1(t)\,dt + \int_0^x f_2(t)\,dt$$

$$= \lambda . \varphi(f_1)(x) + \varphi(f_2)(x)$$

Donc $\varphi(\lambda f_1 + f_2) = \lambda . \varphi(f_1) + \varphi(f_2)$

Donc φ est linéaire

2. Avec les notations de la question précédente $g(0) = 0$

Donc si $g \in \mathrm{Im}(\varphi)$ alors g s'annule en 0.

Ainsi φ n'est pas surjective.

On voit facilement que $\mathrm{Im}\,\varphi = \{ g \in C^1([0,1];\mathbb{R});\ g(0) = 0 \}$

Soit $f \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Alors $\forall x \in [0,1]$, $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt = 0$

On dérive : $\forall x \in [0,1]$, $g'(x) = f(x) = 0$

Donc $f = 0$

Ainsi $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$. Donc f <u>est injective</u>.