$$\varphi : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$$
$$P \longmapsto (X^2-1).P'' + X.P' - 4P$$

1. * φ est définie sur $\mathbb{R}[X]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}[X]$ (évident)

* Soit $(\lambda, P, Q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}[X]^2$.

$$\varphi(\lambda.P+Q) = (X^2-1).(\lambda P+Q)'' + X.(\lambda P+Q)' - 4(\lambda P+Q)$$
$$= (X^2-1)\times(\lambda P'' + Q'') + X\times(\lambda P' + Q') - 4\times(\lambda P+Q)$$
$$= \lambda\left((X^2-1)P'' + XP' - 4P\right) + (X^2-1)Q'' + XQ' - 4Q$$
$$= \lambda \cdot \varphi(P) + \varphi(Q)$$

donc φ est linéaire

* φ est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$

2. On note $n = \deg(P) \in \mathbb{N}$ et

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \quad \text{où } (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ et } a_n \neq 0$$

On a $P = a_n X^n +$ polynôme de degré $\leqslant n-1$

$P' = n a_n X^{n-1} +$ polynôme de degré $\leqslant n-2$

$P'' = n(n-1) a_n X^{n-2} +$ polynôme de degré $\leqslant n-3$

Donc :

$$\varphi(P) = n(n-1)a_n X^n + n a_n X^n - 4a_n X^n + \text{polynôme de } d^\circ \leq n-1$$

$$= a_n \times (n^2 - n + n - 4) X^n + \text{polynôme de } d^\circ \leq n-1$$

$$= a_n \times (n^2 - 4) \times X^n + \text{polynôme de } d^\circ \leq n-1$$

Si $n \neq 2$ $\quad a_n \times (n^2 - 4) \neq 0$

donc $\boxed{\deg(\varphi(P)) = n = \deg(P)}$

Si $n = 2$ $\quad P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ avec $a_2 \neq 0$

$P' = a_1 + 2a_2 X$

$P'' = 2a_2$

donc $\varphi(P) = (X^2 - 1)2a_2 + a_1 X + 2a_2 X^2 - 4(a_0 + a_1 X + a_2 X^2)$

$= -3a_1 X - 2a_2 - 4a_0$

Si $a_1 \neq 0$: $\deg \varphi(P) = 1$

Si $a_1 = 0$ et $2a_2 + 4a_0 = 0$: $\deg \varphi(P) = 0$

Si $a_1 = 2a_2 + 4a_0 = 0$: $\varphi(P) = 0_{\mathbb{R}[X]}$

donc $\deg(\varphi(P)) = -\infty$

3. Soit $P \in \operatorname{Ker} \varphi$.

Si $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$ alors comme $\deg \varphi(P) = -\infty$

la question précédente nous donne :

$$\deg(P) = 2 \text{ et } P = a_2 X^2 - \frac{a_2}{2} \text{ où } a_2 \in \mathbb{R}^*$$

Donc $\operatorname{Ker}(\varphi) \subseteq \operatorname{Vect}(2X^2 - 1)$.

Réciproquement on trouve :

$$\varphi(2X^2 - 1) = (X^2 - 1)4 + X \times 4X - 4 \times (2X^2 - 1)$$
$$= 0_{\mathbb{R}[X]}$$

donc $2X^2 - 1 \in \operatorname{Ker}(\varphi)$

Comme $\operatorname{Ker}(\varphi)$ sev de $\mathbb{R}[X]$: $\operatorname{Vect}(2X^2 - 1) \subseteq \operatorname{Ker}(\varphi)$

Ccl : $\boxed{\operatorname{Ker}(\varphi) = \operatorname{Vect}(2X^2 - 1)}$