TD16 Ex 6

1. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $\deg P \leq n$ donc $\deg(P') \leq n-1 \leq n$
donc $P' \in \mathbb{R}_n[X]$

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$D(\lambda.P+Q) = (\lambda P+Q)' = \lambda.P' + Q' = \lambda.D(P) + D(Q)$$

Donc D est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

2. En s'inspirant du calcul d'une somme géométrique :

$$(id - D) \circ \Gamma = id + D + D^2 + \dots + D^n - D - D^2 - \dots - D^n - D^{n+1}$$
$$= id - D^{n+1}$$

Mais si $P \in \mathbb{R}_n[X]$: $D^{n+1}(P) = P^{(n+1)} = 0_{\mathbb{R}[X]}$ car $\deg P \leq n$

Donc $D^{n+1} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])}$

Donc $(id - D) \circ \Gamma = id$

Et de même on trouve $\Gamma \circ (id - D) = id$

Donc Γ est inversible pour $\circ$. Par th Γ est bijective et
$\Gamma^{-1} = id - D$.

De plus Γ est linéaire comme somme et composée d'applications qui le sont.

Donc $\Gamma \in GL(\mathbb{R}_n[X])$ et $\Gamma^{-1} = id - D$