Urne de N boules : r rouges et $N-r$ blanches

$1 \quad 2 \quad \dots \quad r$

$1 \quad 2 \quad \dots \quad N-r$

On fixe $n \in [\![1, r]\!]$.

On pioche les boules une par une sans remise jusqu'à avoir obtenu n rouges.

$X_n =$ "nb de tirages effectués"

* $X_n(\Omega) = [\![n, N-r+n]\!]$

on ne tire que des rouges

on a pioché toutes les blanches avant la n-ième blanche

* Soit $k \in [\![n, N-r+n]\!]$.

$(X=k) =$ " les k premiers tirages donnent n rouges et $k-n$ blanches " $= A \cap B$

où $A =$ " les $k-1$ premiers tirages donnent au total $n-1$ rouges "

$B =$ " le k-ième tirage donne 1 rouge "

Donc $\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$

$$\mathbb{P}(A) = \binom{k-1}{n-1} \frac{A_r^{n-1}\, A_{N-r}^{k-n}}{A_N^{k-1}}$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{r-n+1}{N-k+1}$$

donc $\mathbb{P}(X=k) = \frac{r-n+1}{N-k+1} \binom{k-1}{n-1} \frac{(N-r)!\, r!\, (N-k+1)!}{(r-n+1)!\,(N-r-k+n)!\, N!}$

$$= \binom{k-1}{n-1} \frac{(N-r)!\, r!\, (N-k)!}{(r-n)!\,(N-r-k+n)\, N!}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{k-1}{n-1} \times \binom{N-k}{r-n}}{\binom{N}{r}}}$$

Pour $n = r$ on retrouve la loi de l'exercice précédent (avec rouge $\longleftrightarrow$ blanc, blanc $\longleftrightarrow$ noir)