On a $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$

ie $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$ et $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{n}$

Donc $\forall \omega \in \Omega$, $1 \leq X(\omega) \leq n$.

Mais $\forall \omega \in \Omega$, $1 \leq Y(\omega) \leq X(\omega)$

donc $\forall \omega \in \Omega$, $1 \leq Y(\omega) \leq n$.

Donc $Y(\Omega) = [\![1,n]\!]$.

1. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

Cas 1 $j > i$

Comme $Y \leq X$ on a $(X=i) \cap (Y=j) = \emptyset$

donc $\mathbb{P}((X=i) \cap (Y=j)) = 0$

Cas 2 $j \leq i$

On a $\mathbb{P}((X=i) \cap (Y=j)) = \mathbb{P}(X=i) \times \mathbb{P}_{(X=i)}(Y=j)$

Comme $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$ et $i \in [\![1,n]\!]$: $\mathbb{P}(X=i) = \frac{1}{n}$

Pour Y : on choisit au hasard un entier entre 1 et X

donc $\mathbb{P}_{(X=i)}(Y=j) = \frac{1}{i}$ puisque $j \in [\![1,i]\!]$.

Ainsi $\mathbb{P}((X=i) \cap (Y=j)) = \frac{1}{n \times i}$

Conclusion :

$$\mathbb{P}((X=i) \cap (Y=j)) = \begin{cases} \frac{1}{n \times i} & \text{si } j \leq i \\ 0 & \text{si } j > i \end{cases}$$

2. * On a déjà vu que $\boxed{Y(\Omega)=[\![1,n]\!]}$

* Soit $j\in[\![1,n]\!]$.

On veut calculer $\mathbb{P}(Y=j)$.

Comme $X(\Omega)=[\![1,n]\!]$, on sait que les événements $(X=1)$, $(X=2)$, ..., $(X=n)$ forment un sce. Donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(Y=j)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}\big((X=i)\cap(Y=j)\big)$$

$$=\sum_{i=1}^{j-1}\mathbb{P}\big((X=i)\cap(Y=j)\big)+\sum_{i=j}^{n}\mathbb{P}\big((X=i)\cap(Y=j)\big)$$

$$=\sum_{i=1}^{j-1}0+\sum_{i=j}^{n}\frac{1}{n\times i}$$

$$\mathbb{P}(Y=j)=\frac{1}{n}\times\sum_{i=j}^{n}\frac{1}{i}$$

Donc $\boxed{\forall j\in[\![1,n]\!],\ \mathbb{P}(Y=j)=\frac{1}{n}\times\left(\frac{1}{j}+\frac{1}{j+1}+\dots+\frac{1}{n}\right)}$