1. Soit $t \in \mathbb{R}$.

D'après le théorème de transfert : $\mathbb{E}(t^X) = \sum_{k \in X(\Omega)} t^k \cdot \mathbb{P}(X=k)$

donc $\boxed{\mathbb{E}(t^X) = G_X(t)}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad G_X^{(n)}(t) = \sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ \text{tq } k \geq n}} k(k-1)\dots(k-n+1)\, t^{k-n} \cdot \mathbb{P}(X=k)$$

D'après le théorème de transfert :

$$\mathbb{E}(X(X-1)\times\dots\times(X-n+1)) = \sum_{k \in X(\Omega)} \underbrace{k(k-1)\times\dots\times(k-n+1)}_{\substack{=0 \\ \text{si } k \leq n-1}} \cdot \mathbb{P}(X=k)$$

$$= \sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ \text{tq } k \geq n}} k(k-1)\times\dots\times(k-n+1) \cdot \mathbb{P}(X=k)$$

Donc : $\boxed{\mathbb{E}(X(X-1)\times\dots\times(X-n+1)) = G_X^{(n)}(1)}$

3. D'après la formule de Taylor dans $\mathbb{K}[X]$:

$$\boxed{\forall k \in X(\Omega),\quad \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{k!} \times G_X^{(k)}(0)}$$

4. D'après 2. on a $\boxed{\mathbb{E}(X) = G_X'(1)}$

et $\mathbb{E}(X(X-1)) = G_X''(1) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)$ par linéarité de $\mathbb{E}$

Donc $\mathbb{E}(X^2) = G_X''(1) + G_X'(1)$

D'après la formule de Koenig-Huyghens :

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$$

Donc : $\boxed{V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2}$

5. • Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$:

$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = t^0 . \mathbb{P}(X=0) + t^1 . \mathbb{P}(X=1) = \boxed{1-p+pt}$

• Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(N,p)$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = \sum_{k=0}^{N} t^k . \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} . (pt)^k . (1-p)^{N-k} = \boxed{(1-p+pt)^N}$$

• Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,N]\!])$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} t^k = \boxed{\frac{1}{N}(t+t^2+\dots+t^N)}$$