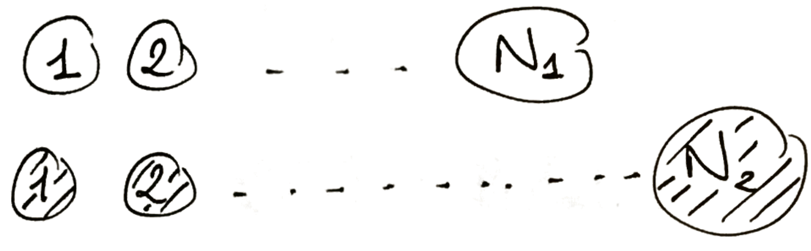
Urne de N boules : N_1 blanches et N_2 noires.



On en pioche n.

1. Avec remise

On répète n fois et de manières indépendantes l'expérience aléatoire : on pioche une boule. Cette expérience peut donner succès ou échec : piocher une blanche ou non.

X est égale au nombre de succès.

Donc $$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{N1}{N}\right)}.$$

ie $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P(X=k) = \binom{n}{k}\left(\frac{N_1}{N}\right)^k\left(\frac{N_2}{N}\right)^{n-k}$

2. Sans remise

$$|\Omega| = A_N^n = \frac{N!}{(N-n)!}$$

Cette fois $X(\Omega) \subseteq [\![0, n]\!]$.

Pour $k \in X(\Omega)$ on a :

$$|(X=k)| = \binom{n}{k} A_{N_1}^{k} \times A_{N_2}^{n-k}$$

Donc $\forall k \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} \times \dfrac{A_{N_1}^{k} A_{N_2}^{n-k}}{A_N^n}$

Donc $\forall k \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{n!\, N_1!\, N_2!\, (N-n)!}{k!\,(n-k)!\,(N_1-k)!\,(N_2-n+k)!\, N!}$

$$= \frac{N_1!}{k!\,(N_1-k)!} \times \frac{N_2!}{(n-k)!\,(N_2-n+k)!} \times \frac{n!\,(N-n)!}{N!}$$

Donc $\boxed{\forall k \in X(\Omega),\ \mathbb{P}(X=k) = \dfrac{\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}}{\binom{N}{n}}}$

<u>Précisions sur $X(\Omega)$</u>

Si on pioche n boules et qu'il y a N_1 blanches alors $X \leqslant \min(n, N_1)$

Si on pioche n boules et qu'il y a N_2 noires, alors comme le nombre de boules noires piochées est $n - X$ on a : $n - X \leq \min(N_2, n)$

donc $X \geqslant n - \min(N_2, n) = \max(0, n - N_2)$

Donc $X(\Omega) = [\![\max(0, n-N_2) ; \min(n, N_1)]\!]$

C'est pourquoi on peut avoir $X(\Omega) \not\subseteq [\![0, n]\!]$.

Mais avec les conventions habituelles sur les coefficients binomiaux la formule :

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$ reste vraie si $k \in [\![0, n]\!]$

(ie même si $k \notin X(\Omega)$ puisqu'on a $0=0$)

3. $\boxed{\text{Simultanément}}$ $|\Omega| = \binom{N}{n}$

On a encore $X(\Omega) \subseteq [\![0, n]\!]$ ($X(\Omega)$ est le même qu'au 2.)

Pour $k \in X(\Omega)$: $|(X=k)| = \binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}$

donc $$\boxed{\mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}}{\binom{N}{n}}}$$

Rem : On a trouvé la même loi pour le 2. et le 3.
Au niveau des probabilités on trouve le même résultat que les tirages soient effectués sans remise ou simultanément.

⚠ au niveau du dénombrement les résultats et les raisonnement sont complètement différents.

Cette loi est appelée loi hypergéométrique de paramètres N, n et $p = \frac{N1}{N}$ notée $\mathcal{H}(N, n, p)$.

Tout ceci est hors_programme.