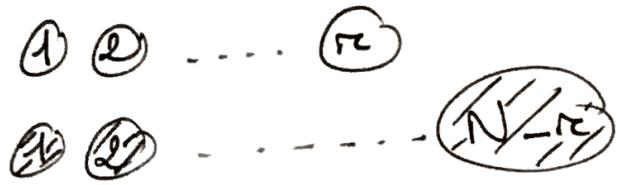


urne de  $N$  balles:  $r$  blanches et  $N-r$  noires



On pioche les balles une par une, sans remise,  
jusqu'à avoir toutes les blanches en main.

$X =$  "nombre de tirages effectués"

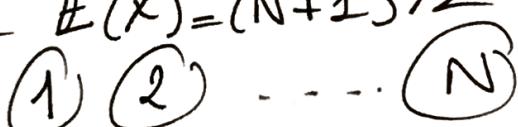


D'après l'expérience du concierge dans le cours:

$$X \hookrightarrow U([1, N])$$

$$\text{et } X(\Omega) = [1, N] \text{ et } \forall k \in [1, N], P(X=k) = \frac{1}{N}$$

On sait que  $E(X) = (N+1)/2$



Toutes les balles sont blanches.

$X$  est constante égale à  $N$ .

$$\text{Donc } E(X) = N.$$

2. (a) \* Pour avoir les  $r$  blanches il faut piocher au minimum  $r$  balles. La  $r$ -ième balle blanche

peut être obtenu tant à la fin, lorsque c'est la dernière balle de l'urne.

Donc  $X(\omega) = [\underline{n}, \bar{N}]$

\* Soit  $k \in [\underline{n}, \bar{N}]$ .

$(X=k)$  = "le  $k$ -ième tirage donne la  $n$ -ième balle blanche"

$$= A \cap B$$

où  $A =$  "les  $k-1$  premiers tirages ont donné au total  $n-1$  blanches"

$B =$  "le  $k$ -ième tirage donne une blanche"

A priori  $A$  et  $B$  ne sont pas indépendants

Gr a :

$$P(X=k) = P(A) \times P_A(B)$$

Par dénombrement:  $P(A) = \frac{A_{\underline{n}}^{n-1} \times A_{N-n}^{k-n} \times \binom{k-1}{n-1}}{A_N^{k-1}}$

Et  $P_A(B) = \frac{1}{N-k+1}$

$$\text{Donc } P(X=k) = \frac{1}{N-k+1} \times \binom{k-1}{r-1} \times \frac{A_r^{r-1} \times A_{N-r}^{k-r}}{A_N^{k-1}}$$

$$= \frac{1}{\cancel{N-k+1}} \times \frac{(k-1)!}{(r-k)!(r-j)!} \times \frac{\cancel{r!} (N-r)! \cancel{(N-k+1)!}}{\cancel{1!} \cancel{(N-k)!} N!}$$

$$\boxed{P(X=k) = \frac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{N}{r}} \text{ pour tout } k \in [r, N]}$$

2.(b) Comme  $X(\Omega) = [r, N]$  on a d'après le th de transfert:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=r}^N k \cdot P(X=k) = \frac{1}{\binom{N}{r}} \sum_{k=r}^N k \binom{k-1}{r-1} \\ &= \frac{1}{\binom{N}{r}} \sum_{k=r}^N r \binom{k}{r} \quad \text{avec la formule du pion} \\ &= \frac{r}{\binom{N}{r}} \sum_{k=r}^N \binom{k}{r} \end{aligned}$$

Il reste à calculer  $\sum_{k=r}^N \binom{k}{r}$ .

méthode 1 Avec la formule de Pascal:

$$\sum_{k=r}^N \binom{k}{r} = \sum_{k=r}^N \left[ \binom{k+1}{r+1} - \binom{k}{r+1} \right]$$

On reconnaît une somme télescopique :

$$\sum_{k=r}^N \binom{k}{r} = \binom{N+1}{r+1} - \underbrace{\binom{r}{r+1}}_{=0} = \binom{N+1}{r+1}$$

méthode 2 Avec la loi de  $X$ .

Comme  $X(\Omega) = [r, N]$  :

$$\sum_{k=r}^N P(X=k) = 1 \text{ donc } \sum_{k=r}^N \binom{k-1}{r-1} = \binom{N}{r}$$

donc  $\sum_{k=r-1}^{N-1} \binom{k}{r-1} = \binom{N}{r}$

Et si on refait l'exercice avec une urne de  $N+1$  balles dont  $r+1$  blanches:

$$\sum_{k=r}^N \binom{k}{r} = \binom{N+1}{r+1}$$

$$\text{On trouve } E(X) = \frac{r}{\binom{N}{r}} \binom{N+1}{r+1}$$

Avec la formule du pion :  $\binom{N+1}{r+1} = \frac{N+1}{r+1} \binom{N}{r}$

Donc 
$$E(X) = \frac{r(N+1)}{r+1}$$

et d'après 1. cette  
formule est vraie  
si  $r=1$  ou  $r=N$