Soit $n \in \mathbb{N}$.

On pose pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$

Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ on a :

$$P_k = X^k \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (-1)^j X^j$$ avec la formule du binôme

$$P_k = X^k \times \left(1 + \text{termes de degré} \geq 1\right)$$
$$= X^k + \text{termes de degré} \geq k+1$$

Donc si on note $\mathcal{B}_{cano} = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ car :

$$\text{Mat}(P_0, \dots, P_n ; \mathcal{B}_{cano}) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ * & & & 1 \end{pmatrix}$$

donc $\det_{\mathcal{B}_{cano}}(P_0, \dots, P_n) = 1^{n+1} = 1 \neq 0$

Donc $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.