1. (a) On note χ la fonction polynomiale définie par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \ \chi(\lambda) = \det(\lambda . id - f)$$

χ est appelé <u>polynôme caractéristique de f</u>

On note $\mathcal{B}_{cano}$ la base canonique de $\mathbb{C}^3$.

On a $Mat(f ; \mathcal{B}_{cano}) = A$ et $Mat(id ; \mathcal{B}_{cano}) = I_3$

donc $Mat(\lambda id - f ; \mathcal{B}_{cano}) = \lambda I_3 - A$

et donc $\chi(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$

$$= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda(\lambda - 1) + 1) - 1$$

$$= \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda - i)(\lambda + i)$$

Donc <u>les valeurs propres de f</u> sont 1, i et $-i$.

1.(b) * On cherche une base de $\mathrm{Ker}(f-id)$.

On a $\mathrm{Mat}(f-id; \mathcal{B}_{can}) = A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Pour $(x,y,z) \in \mathbb{C}^3$ on a donc :

$$(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f-id) \iff \begin{cases} -x+y = 0 \\ -y+z = 0 \\ x-y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x+y = 0 \\ -y+z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = z \\ y = z \\ z \text{ qcq dans } \mathbb{C} \end{cases}$$

donc $\mathrm{Ker}(f-id) = \mathrm{Vect}(\underbrace{(1,1,1)}_{\vec{u_1}})$

Comme $\vec{u_1} \neq \vec{0}$, la famille $(\vec{u_1})$ est une base de $\mathrm{Ker}(f-id)$.

Rem : $\vec{u_1} \in \mathrm{Ker}(f-id) \iff (f-id)(\vec{u_1}) = \vec{0}$

$\iff f(\vec{u_1}) - \vec{u_1} = \vec{0} \iff f(\vec{u_1}) = \vec{u_1}$

* Idem avec $\mathrm{Ker}(f-i.id)$.

$$(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f-i.id) \iff \begin{cases} -ix+y = 0 \\ -iy+z = 0 \\ x-y+(1-i)z = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -ix + y = 0 \\ -iy + z = 0 \\ (1-i)y + (1+i)z = 0 \quad L_3 \leftarrow iL_3 + L_1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -ix + y = 0 \\ -iy + z = 0 \\ 0 = 0 \quad L_3 \leftarrow iL_3 + (1-i)L_2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = -iz \\ y = -iz \\ z \text{ qcq dans } \mathbb{C} \end{cases}$$

donc $\operatorname{Ker}(f - i.id) = \operatorname{Vect}((-1, -i, 1)) = \operatorname{Vect}((\underbrace{1, i, -1}_{\vec{u_2}}))$

Comme $\vec{u_2} \neq \vec{0}$, la famille $(\vec{u_2})$ est une base de $\operatorname{Ker}(f - i.id)$.

Rem : $f(\vec{u_2}) = i.\vec{u_2}$

* Avec $\operatorname{Ker}(f + i.id)$

$(x, y, z) \in \operatorname{Ker}(f + i.id) \Longleftrightarrow \begin{cases} ix + y = 0 \\ iy + z = 0 \\ x - y + (1+i)z = 0 \end{cases}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} ix + y = 0 \\ iy + z = 0 \\ -(1+i)y + (i-1)z = 0 \quad L_3 \leftarrow iL_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} ix + y = 0 \\ iy + z = 0 \\ 0 = 0 \quad L_3 \leftarrow iL_3 + (1+i)L_2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = iz \\ z \text{ qcq dans } \mathbb{C} \end{cases}$$

donc $\operatorname{Ker}(f+i\cdot id) = \operatorname{Vect}((-1, i, 1)) = \operatorname{Vect}((\underbrace{1, -i, -1}_{\vec{u_3}}))$

Comme $\vec{u_3} \neq \vec{0}$, la famille $(\vec{u_3})$ est une base de $\operatorname{Ker}(f+i\cdot id)$

<u>Rem</u>: $f(\vec{u_3}) = -i\cdot\vec{u_3}$

* On pose $\mathcal{E} = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$.

$$\underset{\mathcal{B}_{cano}}{\operatorname{Mat}}(\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -i \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

donc $\underset{\mathcal{B}_{cano}}{\det}(\mathcal{E}) = -i - 1 - i - (i + i - 1)$

$= -4i \neq 0$

Donc $\mathcal{E}$ est une base de $\mathbb{C}^3$.

$$\underset{\mathcal{E}}{\operatorname{Mat}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

Donc si $P = P_{\mathcal{B}_{cano} \to \mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -i \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ alors P est inversible

et $A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}P^{-1}$

2. Soient $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé.

- Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\chi(\lambda) = \det(\lambda . id - g) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -2 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix}$

$$= (\lambda - 1) . \begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-1) . (\lambda(\lambda+1) - 2)$$

$$= (\lambda - 1) . (\lambda^2 + \lambda - 2) = (\lambda - 1)^2 . (\lambda + 2)$$

Les racines complexes de χ sont donc 1 et -2.

- On cherche une base de $Ker(g - id)$.

$$\begin{cases} -x - y + 2z = 0 \\ \quad\quad 0 = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \iff x + y - 2z = 0 \iff \begin{cases} x = -y + 2z \\ y, z \text{ qcq dans } \mathbb{R} \end{cases}$$

donc $Ker(g - id) = Vect\big(\underbrace{(-1,1,0)}_{u_1} ; \underbrace{(2,0,1)}_{u_2}\big)$

De plus u_1 et u_2 sont non colinéaires et donc (u_1, u_2) est une base de $Ker(g - id)$

- Idem pour $Ker(g + 2id)$.

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ \quad 3y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \\ z \text{ qcq ds } \mathbb{R} \end{cases}$$

donc $Ker(g - 2id) = Vect\big(\underbrace{(-1,0,1)}_{u_3}\big)$

• On montre que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$:

$$\det_{\mathcal{B}_c}(u_1, u_2, u_3) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 1 + 0 - 0 - 0 - 2 = -3 \neq 0$$

• Si on pose $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ alors $\boxed{\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$

et donc si $P = P_{\mathcal{B}_c \to \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

alors $\boxed{B = P \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \times P^{-1}}$