1. $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$

C'est une famille de polynômes non nuls et de degrés échelonnés donc elle est libre.

Elle est maximale car $\mathrm{Card}(\mathcal{B}) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$.

$\mathcal{B}$ est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$

$P \longmapsto f(P) = 2(X+1).P - (X^2 - 2X + 1).P'$

* f est linéaire car si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(P, Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2$:

$$f(\lambda P + Q) = 2(X+1).(\lambda P + Q) - (X^2 - 2X + 1).(\lambda P' + Q')$$
$$= \lambda\left(2(X+1)P - (X^2 - 2X + 1)P'\right) + 2(X+1).Q - (X^2 - 2X + 1).Q'$$
$$= \lambda.f(P) + f(Q)$$

et si $P \in \mathbb{R}_2[X]$ alors $\deg(P) \leqslant 2$ et $\deg(P') \leq 1$

donc $\deg\left(2(X+1).P\right) \leqslant 3$ et $\deg\left((X^2 - 2X + 1)P'\right) \leqslant 3$

donc $\deg\left(f(P)\right) \leqslant 3$

Mais si on note $P = aX^2 + bX + c$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

alors $f(P) = 2(X+1).(aX^2+bX+c) - (X^2-2X+1)(2aX+b)$

$$= \cancel{2aX^3} + (2b+2a)X^2 + (2c+2b)X + 2c$$

$$- \cancel{2aX^3} - (b-4a)X^2 + (2b-2a)X - b$$

$$= (b+6a)X^2 + (2c+4b-2a)X + 2c - b$$

donc $\deg(f(P)) \leq 2$ donc $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.

Ainsi f est définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Donc f est <u>un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$</u>

* on cherche $f(P_0)$, $f(P_1)$ et $f(P_2)$ en fonction de P_0, P_1, P_2.

$f(P_0) = 2X + 2 = 2P_1 + 4P_0$

$f(P_1) = 2(X+1)(X-1) - (X-1)^2 = (X-1)(2X+2-X+1)$

$= (X-1)(X+3) =$ X^2+2X-3 $= (X^2-2X+1) +$ 4(X-1)

$= P_2 + 4P_1$

$f(P_2) = 2(X+1)(X-1)^2 - 2(X-1)^3 = 2(X-1)^2(X+1-X+1)$

$= 4.P_2$

$$\text{donc}\quad \mathrm{Mat}(f;\mathcal{B}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(P_0) & f(P_1) & f(P_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow P_0 \\ \leftarrow P_1 \\ \leftarrow P_2 \end{array}$$