1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

L'application linéaire canoniquement associée est

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) = (x+z,\ 2x-y-2z,\ -x-y-z)$$

Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f) \iff \begin{cases} \boxed{x} + z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \boxed{x} \quad + z = 0 & \\ -y - 4z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -y \quad = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

$$\iff x = y = z = 0$$

Donc $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$. Donc f est injectif.

Comme f est un endomorphisme en dimension finie on sait que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$ et $\boxed{\mathrm{rg}(f) = 3}$.

Ainsi $\emptyset$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

L'application linéaire canoniquement associé est

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x, y, z) \longmapsto f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, x + 2y + 3z, x + 2y + 3z)$

Cette fois on voit directement une relation entre les colonnes de B. Si on les note C_1, C_2, C_3 :

$$C_2 = 2C_1 \text{ et } C_3 = 3C_1$$

Si on on note $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

on a donc $f(\vec{e_2}) = 2f(\vec{e_1})$ et $f(\vec{e_3}) = 3f(\vec{e_1})$.

Donc $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}\left(f(\vec{e_1}), f(\vec{e_2}), f(\vec{e_3})\right) = \operatorname{Vect}(f(\vec{e_1}))$

On $f(\vec{e_1}) = (1, 1, 1) \neq \vec{0}$ donc $(f(\vec{e_1}))$ est une base de $\operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{Im}(f)) = 1$

D'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\operatorname{Ker}(f)) + \operatorname{rg}(f)$$

donc $\dim(\operatorname{Ker}(f)) = 3 - 1 = 2$

Une base de $Ker(f)$ et donc obtenue avec deux vecteurs non colinéaires de $Ker(f)$.

Comme $f(\vec{e_2}) = 2f(\vec{e_1})$ et $f(\vec{e_3}) = 3f(\vec{e_1})$

on a par linéarité de f :

$$f(\vec{e_2} - 2\vec{e_1}) = f(\vec{e_3} - 3\vec{e_1}) = \vec{0}$$

donc $\vec{e_2} - 2\vec{e_1} = (-2,1,0)$ et $\vec{e_3} - 3\vec{e_1} = (-3,0,1)$

sont deux vecteurs non colinéaires de $Ker(f)$.

Donc <u>une base de $Ker(f)$ est</u> $(\vec{e_2} - 2\vec{e_1}, \vec{e_3} - 3\vec{e_1})$.

<u>3.</u> $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 \\ 9 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ f endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé.

On note $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4})$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et C_1, C_2, C_3, C_4 les matrices colonnes de C.

On voit que $C_1 = -3C_2$ et $C_4 = -2C_3$

donc $f(\vec{e_1}) = -3f(\vec{e_2})$ et $f(\vec{e_4}) = -2f(\vec{e_3})$

Or $Im(f) = Vect(f(\vec{e_1}), f(\vec{e_2}), f(\vec{e_3}), f(\vec{e_4}))$

donc $Im(f) = Vect(f(\vec{e_2}), f(\vec{e_3}))$

Comme $f(\vec{e_2})$ et $f(\vec{e_3})$ sont non colinéaires, la famille $(f(\vec{e_2}), f(\vec{e_3}))$ est une base de $Im(f)$.

Donc $rg(f) = 2$.

D'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathbb{R}^4) = \dim(Ker(f)) + rg(f)$$

$$\text{donc } \dim(Ker(f)) = 4 - 2 = 2$$

Par linéarité de f : $f(\vec{e_1} + 3\vec{e_2}) = \vec{0}$

$f(\vec{e_4} + 2\vec{e_3}) = \vec{0}$

donc $\vec{e_1} + 3\vec{e_2} = (1, 3, 0, 0)$ et $\vec{e_4} + 2\vec{e_3} = (0, 0, 2, 1)$ sont deux vecteurs non colinéaires de $Ker(f)$, donc une famille libre maximale de $Ker(f)$, donc une base de $Ker(f)$.