On suppose $f : E \longrightarrow E$ linéaire et $p \in \mathbb{N}^*$ tq

$f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Soit $\vec{x_0} \in E$ tel que $f^{p-1}(\vec{x_0}) \neq \vec{0_E}$.

Montrons que la famille $(\vec{x_0}, f(\vec{x_0}), f^2(\vec{x_0}), \dots, f^{p-1}(\vec{x_0}))$ est libre.

Soient $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}$ scalaires tels que :

$$\sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k . f^k(\vec{x_0}) = \vec{0_E}$$

On a donc :

$$\alpha_0 \vec{x_0} + \alpha_1 f(\vec{x_0}) + \alpha_2 f^2(\vec{x_0}) + \dots + \alpha_{p-1} . f^{p-1}(\vec{x_0}) = \vec{0_E}$$

On applique f^{p-1} qui est linéaire :

$$f^{p-1}\left(\alpha_0 \vec{x_0} + \alpha_1 f(\vec{x_0}) + \alpha_2 f^2(\vec{x_0}) + \dots + \alpha_{p-1} . f^{p-1}(\vec{x_0})\right) = \vec{0_E}$$

donc $\alpha_0 f^{p-1}(\vec{x_0}) + \alpha_1 f^p(\vec{x_0}) + \alpha_2 f^{p+1}(\vec{x_0}) + \dots + \alpha_{p-1} f^{2p-2}(\vec{x_0}) = \vec{0_E}$

Or $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^{p+k}(\vec{x_0}) = f^k(f^p(\vec{x_0})) \underset{f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}}{=} f^k(\vec{0_E}) \underset{f \text{ linéaire}}{=} \vec{0_E}$

On a donc $\alpha_0 . f^{p-1}(\vec{x}) = \vec{0}_E$.

Comme $f^{p-1}(\vec{x}) \neq \vec{0}_E$ on obtient $\underline{\alpha_0 = 0}$.

On le réinjecte dans l'équation de départ :

$$\alpha_1 . f(\vec{x}) + \alpha_2 f^2(\vec{x}) + \dots + \alpha_p . f^{p-1}(\vec{x}) = \vec{0}_E$$

En appliquant f^{p-2} on arrive à :

$$\alpha_1 . f^{p-1}(\vec{x}) = \vec{0}_E \quad \text{donc} \quad \underline{\alpha_1 = 0}.$$

On le réinjecte puis applique successivement $f^{p-3}, \dots, f$

pour arriver à :

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{p-2} = 0 \quad \text{et} \quad \alpha_p . f^{p-1}(\vec{x}) = \vec{0}_E$$

ce qui donne $\alpha_{p-1} = 0$.

Donc <u>la famille $(\vec{x}, f(\vec{x}), \dots, f^{p-1}(\vec{x}))$ est libre</u>.

<u>Rem :</u> On a donc $\mathrm{Card}\,(\vec{x}, f(\vec{x}), \dots, f^{p-1}(\vec{x})) \leq \dim(\mathbb{E})$

ie $p \leq n$.

2. Si $p = n = \dim(E)$ alors la famille $\mathcal{F} = (\vec{x}, f(\vec{x}), \dots, f^{n-1}(\vec{x}))$ est libre maximale dans E et est donc une <u>base de E</u>.

Pour $k \in [\![0, n-2]\!]$ on a : $f(f^k(\vec{x})) = f^{k+1}(\vec{x})$

Et $f(f^{n-1}(\vec{x})) = f^n(\vec{x}) = \vec{0}$ car $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$

$$\text{Donc } \mathrm{Mat}(f;\mathcal{F}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(\vec{x}) & f(f(\vec{x})) & & f(f^{n-2}(\vec{x})) & f(f^{n-1}(\vec{x})) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \vec{x} \\ \leftarrow f(\vec{x}) \\ \\ \leftarrow f^{n-2}(\vec{x}) \\ \leftarrow f^{n-1}(\vec{x}) \end{array}$$

* Cette matrice est appelée "bloc de Jordan".

* Il est remarquable qu'on trouve une représentation matricielle très simple alors qu'on ne connaît ni E ni f. C'est un résultat très général.

* Si on se place dans la base $\mathcal{B} = (f^{n-1}(\vec{x}), \dots, f(\vec{x}), \vec{x})$

$$\text{alors } \mathrm{Mat}(f;\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$