1. $u : \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n$ est linéaire et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de $\mathbb{K}^p$ donc on sait que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_p))$

Mais $u(e_{r+1}) = \dots = u(e_p) = 0$ puisque les vecteurs $e_{r+1}, \dots, e_p$ sont dans $\mathrm{Ker}(u)$

Donc $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_r))$

Mais comme $G \oplus \mathrm{Ker}\, u = \mathbb{K}^p$ on a $\dim(\mathrm{Ker}\, u) = p - r$

et d'après le théorème du rang : $\dim(\mathrm{Im}\, u) = \dim(\mathbb{K}^p) - \dim(\mathrm{Ker}\, u)$
$= r$

Donc la famille $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ est génératrice minimale de $\mathrm{Im}(u)$ et est donc une base de $\mathrm{Im}(u)$.

2. $\mathrm{Im}(u)$ est un sev de $\mathbb{K}^n$ et $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$.

Donc on peut la compléter avec des vecteurs $\varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_n$ pris dans $\mathbb{K}^n$ pour obtenir $\mathcal{C} = (u(e_1), \dots, u(e_r), \varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_n)$ base de $\mathbb{K}^n$.

$$\text{Alors } \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u(e_1) & \dots & u(e_r) & u(e_{r+1}) & \dots\ u(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & (0) \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ (0) & & & & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u(e_1) \\ \vdots \\ u(e_r) \\ \varepsilon_{r+1} \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{array}$$

$= J_r$

<u>3.</u> Si $P \in Gl_p(\mathbb{K})$ est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^p$ à $\mathcal{B}$ et si $Q \in Gl_n(\mathbb{K})$ est la matrice de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à $\mathcal{E}$ alors d'après la formule de changement de bases :

$$A = P \times J_r \times Q^{-1}$$

<u>4.</u> Comme P et Q sont inversibles : $rg(A) = rg(J_r)$

Comme J_r est échelonnée par lignes :

$$rg(J_r) = \text{nb de pivots} = r$$

Donc $rg(A) = r$.

De plus ${}^tA = {}^t(Q^{-1}) \times {}^tJ_r \times {}^tP = {}^t(Q^{-1}) \times J_r \times {}^tP$

car J_r est symétrique.

Et on sait que ${}^t(Q^{-1})$ et ${}^tP$ sont inversibles (car P et Q^{-1} le sont).

Donc $rg({}^tA) = rg(J_r) = r$.

<u>Conclusion</u> $\boxed{rg(A) = rg({}^tA)}$ (théorème admis dans le cours)