**1.** Soit $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}({}^tV)$.

On a donc ${}^tVX = O_{n,1}$ avec ${}^tV = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$

Donc pour tout $i \in [\![ \ , n ]\!]$ :

$$\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j \cdot x_i^j = 0$$

ie $x_0, \dots, x_n$ sont racines du polynôme $\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j X^{j-1}$

Ce polynôme est de degré au plus n et a $n+1$ racines distinctes : il est donc nul.

On a donc $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n+1} = 0$ ie $X = O_{n+1,1}$

Ainsi $\mathrm{Ker}({}^tV) = \{O_{n,1}\}$.

On en déduit que ${}^tV$ est inversible et donc que <u>V est inversible</u>.

**2.** Soit $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$

$P \longmapsto (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n))$

$\varphi$ est clairement <u>linéaire</u>.

Sa matrice relativement aux bases canoniques de de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$ est $V$ qui est inversible.

Donc $\varphi$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ vers $\mathbb{R}^{n+1}$ :

$$\forall (y_0, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \ \exists ! \, P \in \mathbb{R}_n[X], \ \varphi(P) = (y_0, \dots, y_n)$$

$$\text{ie } \forall j \in [\![0,n]\!], \ P(x_j) = y_j$$

Pour $i \in [\![0,n]\!]$ on choisit $(y_0, \dots, y_n) = (0, \dots, 0, \underset{\downarrow \atop i\text{-ième}}{1}, 0, \dots, 0)$

alors $\exists ! \, L_i \in \mathbb{R}_n[X], \ \forall j \in [\![0,n]\!], \ L_i(x_j) = \delta_{i,j}$

<u>rem:</u> les polynômes $L_0, \dots, L_n$ sont les polynômes de Lagrange