$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose que la série $\sum_1 u_n$ converge.

but la série $\sum_1 v_n$ converge

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$ donc $1 + u_n \geqslant 1$

et donc $0 \leqslant v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n} \leqslant u_n$

Par comparaison de séries à termes positifs la série $\sum_1 v_n$ converge.

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que la série $\sum_1 v_n$ converge.

but la série $\sum_1 u_n$ converge

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n} \iff v_n \cdot (1 + u_n) = u_n$$
$$\iff u_n \cdot (v_n - 1) = -v_n$$
$$\iff u_n = \frac{v_n}{1 - v_n}$$

Comme la série $\sum v_n$ converge on a $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc $1 - v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ donc $1 - v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} 1$

donc $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$

Donc par comparaison de séries à termes positifs,
les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Donc la série $\sum u_n$ converge.