1. Soit $x \in]-1,1[$.

Par croissances comparées $n^3 . |x|^{n-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc $n |x|^{n-1} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Comme $2>1$ la série de Riemann $\sum_1 \frac{1}{n^2}$ converge

donc par comparaison de séries à termes positifs, la série

$\sum_1 n x^{n-1}$ converge absolument donc converge.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1}$.

On a $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $x^k = (k+1)x^k - kx^k$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} x^k = \sum_{k=1}^{n} (k+1)x^k - \sum_{k=1}^{n} kx^k$

$= \sum_{k=2}^{n+1} kx^{k-1} - x . \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$

$= S_n + (n+1)x^n - 1 - x . S_n$

ie $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x \frac{1-x^{n}}{1-x} = (1-x)S_n + (n+1)x^n - 1$

donc $S_n = \frac{1}{1-x} \times \left(x\frac{1-x^{n}}{1-x} + 1 - (n+1)x^n\right)$

or comme $-1<x<1$ on a $x^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

et $(n+1)x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées

Donc $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{1-x} \times \left(\frac{x}{1-x} + 1\right) = \frac{1}{(1-x)^2}$

donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

2. On fixe $n \in \mathbb{N}$.

On a $\forall x \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

On dérive : $\forall x \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} = \frac{-(n+1)x^n(1-x)+(1-x^{n+1})}{(1-x)^2}$

$$= \frac{n x^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

Par croissances comparées : $n x^{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$(n+1)x^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{(1-x)^2}$

Donc la série $\sum n x^{n-1}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$