1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n} \times \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n} \times \frac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^{-\alpha} \cdot \frac{1}{n^{\alpha/2}}$

Par comparaison par équivalents de séries à termes positifs, les séries $\sum u_n$ et $\sum 2^{-\alpha} \cdot \frac{1}{n^{\alpha/2}}$ sont de même nature.

Comme $2^{-\alpha}$ est une constante p/r à n :

$\sum u_n$ et $\sum \frac{1}{n^{\alpha/2}}$ sont de même nature.

D'après le critère de Riemann : $\sum \frac{1}{n^{\alpha/2}}$ converge $\iff \frac{\alpha}{2} > 1$
$\iff \alpha > 2$

Donc : $\boxed{\sum u_n \text{ converge} \iff \alpha > 2}$

2. Si $\alpha \leq 0$: la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ ne converge pas vers 0
donc la suite (u_n) non plus.
Donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Si $\alpha > 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha}$

Par comparaison de séries à termes positifs par équivalent, les séries $\sum u_n$ et $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ sont de même nature.

- Si $0 < \alpha \leq 1$: $\sum u_n$ diverge
- Si $\alpha > 1$: $\sum u_n$ converge.

$\boxed{\text{BILAN : } \sum u_n \text{ converge} \iff \alpha > 1}$

3. $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$$\underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

de même : $\ln(n+2) \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

donc $u_n \underset{n\to+\infty}{=} (1+a+b).\ln(n) + \frac{a+2b}{n} - \frac{a+4b}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Si $1+a+b \neq 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$ donc $\sum u_n$ diverge grossièrement

Si $1+a+b=0$ et $a+2b \neq 0$:

$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a+2b}{n}$ donc $\sum u_n$ diverge

Si $1+a+b=0$ et $a+2b=0$: $a=-2$ et $b=1$

$u_n \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2}$

donc $\sum u_n$ converge.

$\boxed{\text{BILAN : } \sum u_n \text{ converge} \iff a=-2 \text{ et } b=1}$

Rem : on peut calculer la somme de la série (voir exercice 2).