Exercice 1

1. On pose $S_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right)$ pour $n \geq 2$.

Pour $n \geq 1$, $S_{2n} = \sum_{k=2}^{2n} \ln\left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right)$

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{(-1)^{2k}}{2k}\right) + \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1+\frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{2k+1}{2k}\right) + \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{2k}{2k+1}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\ln\left(\frac{2k+1}{2k}\right) + \ln\left(\frac{2k}{2k+1}\right)\right) - \ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right)$$

$$= 0 + \ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Et $S_{2n+1} = S_{2n} + \ln\left(1+\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}\right) = S_{2n} + \ln\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 + 0 = 0$$

Comme les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers 0, on sait d'après le théorème des suites extraites recouvrantes que la suite (S_n) converge vers 0.

Par définition la série $\underline{\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)}$ converge

et $\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) = 0}$

2. On remarque que $\forall n \geq 2$, $\ln(P_n) = S_n$

donc $P_n = \exp(S_n)$

Par continuité de l'exponentielle en 0 : $\boxed{P_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1}$

Rem :
On pourrait écrire $\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) = 1$ mais ce n'est pas au programme de PCSI