$\mathbb{F}, \mathbb{G}$ sev de $\mathbb{E}$ euclidien

1. Mq $(\mathbb{F}+\mathbb{G})^\perp = \mathbb{F}^\perp \cap \mathbb{G}^\perp$

* On a $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{F}+\mathbb{G}$ donc d'après le cours $(\mathbb{F}+\mathbb{G})^\perp \subseteq \mathbb{F}^\perp$

De même $(\mathbb{F}+\mathbb{G})^\perp \subseteq \mathbb{G}^\perp$.

Donc $(\mathbb{F}+\mathbb{G})^\perp \subseteq \mathbb{F}^\perp \cap \mathbb{G}^\perp$

* Soit $\vec{x} \in \mathbb{F}^\perp \cap \mathbb{G}^\perp$.

Si $\vec{y} \in \mathbb{F}+\mathbb{G}$ alors $\exists (\vec{y_F}, \vec{y_G}) \in \mathbb{F}\times\mathbb{G}$, $\vec{y} = \vec{y_F} + \vec{y_G}$

donc $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \underbrace{\vec{x}}_{\in \mathbb{F}^\perp}, \underbrace{\vec{y_F}}_{\in \mathbb{F}} \rangle + \langle \underbrace{\vec{x}}_{\in \mathbb{G}^\perp}, \underbrace{\vec{y_G}}_{\in \mathbb{G}} \rangle$

$= 0 + 0 = 0$

Donc $\forall \vec{y} \in \mathbb{F}+\mathbb{G}$, $\vec{x} \perp \vec{y}$

donc $\vec{x} \in (\mathbb{F}+\mathbb{G})^\perp$.

Ceci prouve que $\mathbb{F}^\perp \cap \mathbb{G}^\perp \subseteq (\mathbb{F}+\mathbb{G})^\perp$

* Par double-inclusion : $(\mathbb{F}+\mathbb{G})^\perp = \mathbb{F}^\perp \cap \mathbb{G}^\perp$

2. On applique résultat précédent avec les sev $\mathbb{F}^\perp$ et $\mathbb{G}^\perp$:

$$(\mathbb{F}^\perp + \mathbb{G}^\perp)^\perp = (\mathbb{F}^\perp)^\perp \cap (\mathbb{G}^\perp)^\perp$$

Comme $\mathbb{E}$ est euclidien : $(\mathbb{F}^\perp)^\perp = \mathbb{F}$ et $(\mathbb{G}^\perp)^\perp = \mathbb{G}$

donc : $(\mathbb{F}^\perp + \mathbb{G}^\perp)^\perp = \mathbb{F} \cap \mathbb{G}$

On passe à l'orthogonal :

$$\left((\mathbb{F}^\perp + \mathbb{G}^\perp)^\perp\right)^\perp = (\mathbb{F} \cap \mathbb{G})^\perp$$

Comme $\mathbb{E}$ est euclidien :

$$\mathbb{F}^\perp + \mathbb{G}^\perp = (\mathbb{F} \cap \mathbb{G})^\perp$$