Pour $n \in \mathbb{N}^*$: $Q_n(X) = \frac{1}{2^n n!}\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$ [Polynômes de Legendre]

1. Comme 1 et (-1) sont racines d'ordre n de $(X^2-1)^n$ on sait que $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, 1 et -1 sont racines de $\left((X^2-1)^n\right)^{(k)}$ mais ne sont pas racines de $\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$.

Pour $k \in [\![1, n]\!]$ on note H_k le prédicat
" $\left((X^2-1)^n\right)^{(k)}$ a au moins k racines distinctes dans $]-1, 1[$ "

Pour $k=1$: $(X^2-1)^n$ s'annule en 1 et -1
donc d'après le th de Rolle $\left((X^2-1)^n\right)'$ s'annule au moins une fois sur $]-1,1[$
Donc H_1 est vrai.
Hérédité Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$ tel que H_k est vrai.
Le polynôme $\left((X^2-1)^n\right)^{(k)}$ a donc au moins k racines distinctes dans $]-1,1[$ notées :

$$-1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k < 1$$

et il s'annule aussi en -1 et 1 puisque $k \in [\![0, n-1]\!]$
Le théorème de Rolle appliqué sur les intervalles $[-1, \alpha_1]$, $[\alpha_1, \alpha_2], \dots, [\alpha_{k-1}, \alpha_k], [\alpha_k, 1]$ donne alors que

$\left((X^2-1)^n\right)^{(k+1)}$ s'annule sur les intervalles

$]-1,\alpha_1[\,,\ ]\alpha_1,\alpha_2[\,,\ \dots,\ ]\alpha_{k-1},\alpha_k[\,,\ ]\alpha_k,1[$.

Comme ces intervalles sont 2 à 2 disjoints, il s'annule au moins $k+1$ fois sur $]-1,1[$.

Donc H_{k+1} est vrai.

Par récurrence finie : H_k est vrai pour tout $k\in[\![1\,;\,n]\!]$

Donc comme H_n est vrai :

$\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$ s'annule au moins n fois sur $]-1,1[$.

Comme $\deg\left((X^2-1)^n\right)=2n$

on a $\deg\left(\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}\right)=2n-n=n$

Donc $\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$ a n racines simples et elles sont dans $]-1,1[$.

Donc Q_n a n racines simples et elles sont dans $]-1,1[$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note H_n le prédicat :

" $\exists R_n \in \mathbb{R}[X]$, $Q_n = X^n + (X^2-1).R_n(X)$ "

Pour $n=0$: $Q_0 = 1 = X^0 + (X^2-1) \times 0$

donc H_0 est vrai avec $R_0(X) = 0_{\mathbb{R}[X]}$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ pour lequel H_n est vrai.

On a donc $Q_n = X^n + (X^2-1) \times R_n(X)$

où $R_n \in \mathbb{R}[X]$.

On a $Q_{n+1} = \dfrac{1}{2^{n+1}.(n+1)!}\left(\left(X^2-1\right)^{n+1}\right)^{(n+1)}$

$= \dfrac{1}{2^{n+1}.(n+1)!}\left(\left(\left(X^2-1\right) \times \left(X^2-1\right)^n\right)'\right)^{(n)}$

$= \dfrac{1}{2^{n+1}(n+1)!} \times \left(2X.(X^2-1)^n + 2nX(X^2-1)^n\right)^{(n)}$

$= \dfrac{1}{2^n.n!} \times \left(X(X^2-1)^n\right)^{(n)}$

Avec la formule de Leibnitz :

$$Q_{n+1} = \frac{1}{2^n.n!} \times \Big[\underbrace{X\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}}_{\binom{n}{0}=1} + \underbrace{n\left((X^2-1)^n\right)^{(n-1)}}_{\binom{n}{1}=n} + \underbrace{0}_{X^{(k)}=0 \text{ si } k \geq 2}\Big]$$

$$Q_{n+1} = X.Q_n(X) + \frac{n}{2^n.n!}\left((X^2-1)^n\right)^{(n-1)}$$

1 et -1 sont racines de $\left((X^2-1)^n\right)^{(n-1)}$ donc

$$\exists S(X) \in \mathbb{R}[X],\ \left((X^2-1)^n\right)^{(n-1)} = (X^2-1).S(X)$$

Avec le prédicat H_n on obtient :

$$Q_{n+1} = X^{n+1} + (X^2-1).\Big[\underbrace{X.R_n(X) + \frac{n}{2^n.n!}S(X)}_{\overset{\text{def}}{=} R_{n+1}(X) \in \mathbb{R}[X]}\Big]$$

Donc H_{n+1} est vrai.

Par récurrence H_n est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q_n(1) = 1$ et $Q_n(-1) = (-1)^n$.

3. $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ d'après l'exercice 1.

Si $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$\langle P, Q_n \rangle = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} P(t)\left((t^2-1)^n\right)^{(n)} dt$$

$$\langle P, Q_n\rangle \overset{IPP}{=} \frac{1}{2^n.n!}\left[P(t)\times\left((t^2-1)^n\right)^{(n-1)}\right]_{-1}^{1} - \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} P'(t)\left((t^2-1)^n\right)^{(n-1)}dt$$

$$= -\frac{1}{2^n.n!}\int_{-1}^{1} P'(t)\left((t^2-1)^n\right)^{(n-1)}dt$$

On recommence $n-1$ fois en utilisant que pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$ la fonction $t\longmapsto\left((t^2-1)^n\right)^{(k)}$ s'annule en -1 et 1 :

$$\langle P, Q_n\rangle = \frac{(-1)^n}{2^n.n!}\times\int_{-1}^{1} P^{(n)}(t)\times(t^2-1)^n dt = \frac{1}{2^n\times n!}\int_{-1}^{1} P^{(n)}(t)\times(1-t^2)^n dt$$

Si $P\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$ alors $P^{(n)} = 0_{\mathbb{R}[X]}$

donc $\langle P, Q_n\rangle = 0$

Donc $Q_n\in\mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}$.

4. D'après la formule précédente :

$$\|Q_n\|^2 = \langle Q_n, Q_n\rangle = \frac{1}{2^n.n!}\int_{-1}^{1} Q_n^{(n)}(t).(1-t^2)^n dt$$

Mais $\deg(Q_n)=n$ donc $Q_n^{(n)}$ est un polynôme constant.

$$Q_n = \frac{1}{2^n . n!}\left(\left(X^2-1\right)^n\right)^{(2n)}$$

or $(X^2-1)^n = X^{2n}$ + termes de degré $\leq 2n-1$

donc $\left((X^2-1)^n\right)^{(2n)} = (2n)!$

donc $Q_n = \dfrac{(2n)!}{2^n \times n!}$

Donc $\|Q_n\|^2 = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}\times(n!)^2} \times \displaystyle\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n\,dt$

Mais $\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n\,dt = \int_{-1}^{1}(1-t)^n \times (1+t)^n\,dt$

$$\overset{\text{IPP}}{=} \left[\frac{-1}{n+1}(1-t)^{n+1}(1+t)^n\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{-1}{n+1}(1-t)^{n+1}n(1+t)^{n-1}\,dt$$

$$= \frac{n}{n+1}\int_{-1}^{1}(1-t)^{n+1}(1+t)^{n-1}\,dt$$

$$\overset{\text{IPP}}{=} \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)} \times \int_{-1}^{1}(1-t)^{n+2}(1-t)^{n-2}\,dt$$

$$= \dots\dots = \frac{n(n-1)\times\dots\times 1}{(n+1)(n+2)\times\dots\times(n+n)}\int_{-1}^{1}(1-t)^{2n}\,dt$$

$$= \frac{(n!)^2}{(2n)!}\times\left[\frac{-1}{2n+1}(1-t)^{2n+1}\right]_{-1}^{1} = \frac{(n!)^2 \times 2^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

donc $\|Q_n\|^2 = \dfrac{2}{2n+1}$