On munit l'espace $C^0([-\pi,\pi];\mathbb{R})$ du produit scalaire.

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\times g(t)\,dt$$

c'est le produit scalaire canonique multiplié par une constante positive donc c'est encore un produit scalaire.

Alors pour $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$:

$$\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^t-(a+b\sin t+c\cos t)\right)^2 dt = \|\exp-(a+b\sin+c\cos)\|^2$$

donc on cherche $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tq

$$\|\exp-(a+b\sin+c\cos)\|^2 = \min_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3}\|\exp-(a+b\sin+c\cos)\|^2$$

$$= \min_{f\in\mathbb{F}}\|\exp-f\|^2 \overset{\text{def}}{=} \alpha$$

où $\mathbb{F}=\mathrm{Vect}(1,\sin,\cos)$

D'après le th de meilleure approximation.

$$\alpha = \|\exp-p_{\mathbb{F}}(\exp)\|^2$$

donc il faut calculer $p_{\mathbb{F}}(\exp)$.

Pour cela on va chercher une base orthonormée de $\mathbb{F}$.

On a :

$$\langle 1, \cos \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \, dt = 0$$

$$\langle 1, \sin \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \, dt = 0$$

$$\langle \sin, \cos \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \times \cos t \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2t) \, dt = 0$$

donc la famille $(1, \sin, \cos)$ est orthogonale.
Comme elle est formée de vecteurs non nuls, elle est donc libre et est une base de $\mathbb{F}$ : $\dim(\mathbb{F}) = 3$.

$$\|1\|^2 = \langle 1, 1 \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 \, dt = 2$$

$$\|\sin\|^2 = \langle \sin, \sin \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t)^2 \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos(2t)}{2} \, dt = 1$$

$$\|\cos\|^2 = \langle \cos, \cos \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t)^2 \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos(2t)}{2} \, dt = 1$$

Donc la famille $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin, \cos\right)$ est une base orthonormée de $\mathbb{F}$.

On a donc $p_{\mathbb{F}}(\exp) = \underbrace{\langle \exp, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}_{=a} + \underbrace{\langle \exp, \sin \rangle}_{=b} \cdot \sin + \underbrace{\langle \exp, \cos \rangle}_{=c} \cdot \cos$

$$\langle \exp, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^t \, dt = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \operatorname{sh}(\pi)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^t \times e^{it}\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{(1+i)t}\,dt = \left[\frac{1}{1+i} e^{(1+i)t}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{1+i}\left(e^{(1+i)\pi} - e^{-(1+i)\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{1+i}\left(-e^{\pi} + e^{-\pi}\right) = \frac{1-i}{2} \times \left(-2sh(\pi)\right)$$

En prenant les parties réelles et imaginaires :

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^t \cos(t)\,dt = -sh(\pi)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^t \sin(t)\,dt = sh(\pi)$$

donc $\langle \exp, \sin \rangle = \frac{sh(\pi)}{\pi}$

$\langle \exp, \cos \rangle = -\frac{sh(\pi)}{\pi}$

Donc $a = \frac{sh(\pi)}{\pi} = b = -c$

Donc $\alpha = \| \exp - \frac{sh(\pi)}{\pi}(1 + \sin - \cos) \|^2$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(e^t - \frac{sh(\pi)}{\pi}(1+\sin - \cos)\right)^2 dt$$

⚠ Le calcul de l'intégrale n'est pas demandé, on demande seulement de trouver a, b, c.