$$\alpha \overset{\text{def}}{=} \inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} (t^3 - at^2 - bt - c)^2 dt$$

$$= \inf_{P\in\mathbb{R}_2[X]} \int_{-1}^{1} (t^3 - P(t))^2 dt$$

Pour $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ on pose $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)\,Q(t)\,dt$.

C'est un produit scalaire d'après l'exercice 1.

On a $\alpha = \inf_{P\in\mathbb{R}_2[X]} \| X^3 - P\|^2$

D'après le théorème de meilleure approximation :

$$\alpha = \| X^3 - p_{\mathbb{R}_2[X]}(X^3)\|^2$$

Donc on doit calculer $p_{\mathbb{R}_2[X]}(X^3)$.

Pour cela on peut déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ en orthonormalisant la base canonique avec l'algorithme de Gram-Schmidt <u>ou</u> utiliser la caractérisation géométrique du projeté orthogonal.

On choisit la seconde méthode (la 1ère est faite dans le cours)

si $Q \overset{\text{def}}{=} p_{\mathbb{R}_2[X]}(X^3)$ alors $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $X^3 - Q \in (\mathbb{R}_2[X])^{\perp}$

Comme $Q \in \mathbb{R}_2[X]$:

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 ; \quad Q = aX^2 + bX + c$$

Comme $X^3 - Q \in \left(\mathbb{R}_2[X]\right)^{\perp}$ on a

$$\langle X^3 - Q, 1 \rangle = \langle X^3 - Q, X \rangle = \langle X^3 - Q, X^2 \rangle = 0$$

$$\langle X^3 - Q, 1 \rangle = 0 = \int_{-1}^{1} \left(t^3 - at^2 - bt - c\right) dt = -\frac{2a}{3} - 2c$$

$$\langle X^3 - Q, X \rangle = 0 = \int_{-1}^{1} \left(t^3 - at^2 - bt - c\right) t \, dt = \frac{2}{5} - \frac{2b}{3}$$

$$\langle X^3 - Q, X^2 \rangle = 0 = \int_{-1}^{1} \left(t^3 - at^2 - bt - c\right) t^2 \, dt = -\frac{2a}{5} - \frac{2c}{3}$$

Donc $a = 0 = c$ et $b = \frac{3}{5}$ donc $Q = \frac{3X}{5}$

Donc $\alpha = \left\| X^3 - \frac{3X}{5} \right\|^2 = \int_{-1}^{1} \left(t^3 - \frac{3t}{5}\right)^2 dt$

$$= \int_{-1}^{1} \left(t^6 - \frac{6t^4}{5} + \frac{9t^2}{25}\right) dt = \frac{2}{7} - \frac{12}{25} + \frac{18}{75} = \frac{8}{175}$$