$\mathbb{E}$ espace euclidien

$\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ base orthonormée de $\mathbb{E}$.

$\mathbb{F}$ sev de $\mathbb{E}$ et $(\vec{x_1}, \dots, \vec{x_p})$ base orthonormée de $\mathbb{F}$.

Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$: $X_k = \mathrm{Mat}(\vec{x_k}; \mathcal{B})$

Donc $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\vec{x_k} = \sum_{i=1}^{n} X_k[i, 1] . \vec{e_i}$

Pour $j \in [\![1, n]\!]$:

$$p_F(\vec{e_j}) = \sum_{k=1}^{p} \langle \vec{e_j}, \vec{x_k} \rangle . \vec{x_k}$$

car $(\vec{x_1}, \dots, \vec{x_p})$ base orthonormée de $\mathbb{F}$

mais $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\langle \vec{e_j}, \vec{x_k} \rangle = \sum_{i=1}^{n} X_k[i, 1] . \langle \vec{e_j}, \vec{e_i} \rangle$

$$= X_k[j, 1]$$

donc
$$p_F(\vec{e_j}) = \sum_{k=1}^{p} X_k[j, 1] . \vec{x_k}$$
$$= \sum_{k=1}^{p} X_k[j, 1] . \left(\sum_{i=1}^{n} X_k[i, 1] . \vec{e_i} \right)$$
$$= \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{n} X_k[j, 1] \times X_k[i, 1] . \vec{e_i} \right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{p} X_k[j, 1] \times X_k[i, 1] \right) . \vec{e_i}$$

Donc si on note $M = \mathrm{Mat}(p_F ; \mathcal{B})$ alors :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad M[i,j] = \sum_{k=1}^{p} X_k[j,1] \times X_k[i,1]$$

$$\text{et} \quad \left(X_k \times {}^tX_k\right)[i,j] = X_k[i,1] \times \left({}^tX_k\right)[1,j]$$

produit d'une matrice colonne par une matrice ligne

$$= X_k[i,1] \times X_k[j,1]$$

donc on a $M = \sum_{k=1}^{p} X_k \times {}^tX_k$