1. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

On pose $\vec{u} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$\vec{v} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leqslant \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

or $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \times 1 = \sum_{k=1}^{n} x_k$

$$\|\vec{u}\|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

$$\|\vec{v}\|^2 = \sum_{k=1}^{n} 1^2 = n$$

Donc $\left| \sum_{k=1}^{n} x_k \right| \leqslant \sqrt{n} \times \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$

Il y a égalité ssi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

ssi $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \ \vec{u} = \lambda \vec{v}$ (car $\vec{v} \neq \vec{0}$)

ssi $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \ x_1 = x_2 = \dots = x_n = \lambda$

ssi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$

2. On munit $C^0([a,b],\mathbb{R})$ de sa structure préhilbertienne canonique.

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

On note $\mathbb{1}_{[a,b]}$ la fonction constante égale à 1 sur $[a,b]$.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \langle f, \mathbb{1}_{[a,b]} \rangle \right| \leqslant \| f \| \times \| \mathbb{1}_{[a,b]} \|$$

or $\displaystyle \langle f, \mathbb{1}_{[a,b]} \rangle = \int_a^b f(t) \times 1 \, dt = \int_a^b f(t)\,dt$

$$\| f \|^2 = \int_a^b f(t)^2 \, dt$$

$$\| \mathbb{1}_{[a,b]} \|^2 = \int_a^b 1^2 \, dt = b-a$$

Donc $\displaystyle \left| \int_a^b f(t)\,dt \right| \leqslant \sqrt{b-a} \times \int_a^b f(t)^2 \, dt$

Il y a égalité ssi f et $\mathbb{1}_{[a,b]}$ sont colinéaires

ssi $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ f = \lambda . \mathbb{1}_{[a,b]}$ (car $\mathbb{1}_{[a,b]} \neq 0$)

ssi f est constante