* Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$.

Alors $P \times Q \in \mathbb{R}[X]$.

Donc par croissances comparées : $n^2 \times |P(n) \times Q(n)| e^{-n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

$$\text{donc } |P(n) \times Q(n) e^{-n}| = \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Comme $2 > 1$ la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge

donc par comparaison de séries à termes positifs, la série

$\sum P(n) \times Q(n) \times e^{-n}$ converge.

Donc le réel $\sum_{n=0}^{+\infty} P(n) \times Q(n) \times e^{-n}$ est bien défini.

Ainsi $\langle .,. \rangle$ est une <u>forme</u>.

* Soient $(P, Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\langle Q, P \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} Q(n) \times P(n) \times e^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} P(n) \times Q(n) \times e^{-n} = \langle P, Q \rangle$$

donc $\langle .,. \rangle$ est une forme <u>symétrique</u>.

* $$\langle \lambda P + Q, R \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda P(n) + Q(n)) \times R(n) \times e^{-n}$$

$$= \lambda . \sum_{n=0}^{+\infty} P(n) \times R(n) \times e^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} Q(n) \times R(n) \times e^{-n}$$

$$= \lambda . \langle P, R \rangle + \langle Q, R \rangle$$

donc $\langle .,. \rangle$ est une forme linéaire à gauche.

Comme elle est symétrique, elle est donc <u>bilinéaire</u>.

$*$ $\langle P,P \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} P(n)^2 e^{-n} \geq 0$ car c'est la limite d'une suite positive.

Donc $\langle .,. \rangle$ est une forme positive.

$*$ $\langle P,P \rangle = 0 \iff \sum_{n=0}^{+\infty} P(n)^2 e^{-n} = 0$

$\iff \forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^{N} P(n)^2 e^{-n} = 0$

une suite croissante positive a une limite nulle ssi elle est stationnaire sur 0

$\iff \forall n \in \mathbb{N}, P(n)^2 e^{-n} = 0$ car c'est une somme de nbs positifs

$\iff \forall n \in \mathbb{N}, P(n) = 0$

$\iff P = 0_{\mathbb{R}[X]}$ car le seul polynôme qui a une infinité de racines est le polynôme nul.

Donc $\langle .,. \rangle$ est une forme définie.

Donc $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.