Exercice 8

1. Pour p entier naturel supérieur ou égal à 2 on note H_p le prédicat :

"si $x_1, \dots, x_p$ sont p vecteurs de E tq $\forall i \neq j$, $\langle x_i ; x_j \rangle < 0$ alors toute sous-famille de $p-1$ vecteurs est libre"

$p=2$. Soient x_1, x_2 vecteurs de E tq $\langle x_1, x_2 \rangle < 0$.

Alors $x_1 \neq 0_E$ et $x_2 \neq 0_E$ donc x_1 est une famille libre et x_2 aussi. Donc H_2 est vrai.

Hérédité forte Soit $p \geqslant 2$ pour lequel $H_2, H_3, \dots, H_p$ sont vrais.

On se donne $x_1, \dots, x_p, x_{p+1}$ $p+1$ vecteurs de E tq $\forall i \neq j$, $\langle x_i, x_j \rangle < 0$.

On se donne une sous-famille de p vecteurs de E. Quitte à renuméroter on peut supposer que c'est $(x_1, \dots, x_p)$.

Pour montrer qu'elle est libre on se donne des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ tels que $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{p-1} x_{p-1} + \alpha_p x_p = 0_E$

Parmi les réels $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ certains sont $\geqslant 0$ et les autres sont < 0. Quitte à renuméroter encore une fois on peut supposer que $\alpha_1 \geqslant 0, \dots, \alpha_k \geqslant 0$ et $\alpha_{k+1} < 0, \dots, \alpha_p < 0$ pour un entier $k \in [\![1, p]\!]$.

On a alors $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k = -\alpha_{k+1} x_{k+1} - \cdots - \alpha_p x_p$

Notons y ce vecteur.

Alors $\|y\|^2 = \langle y, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i, -\sum_{j=k+1}^{p} \alpha_j x_j \right\rangle$

donc $\|y\|^2 = -\sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=k+1}^{p} \underbrace{\alpha_i}_{\geqslant 0} \underbrace{\alpha_j}_{\leqslant 0} \underbrace{\langle x_i, x_j \rangle}_{<0} \right) \leqslant 0$

Donc $\|y\| = 0$ donc $y = 0_E$.

Donc $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k = 0_E = \alpha_{k+1} x_{k+1} + \cdots + \alpha_p x_p$

D'après H_k et H_{p-k} on a $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$
$\alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_p = 0$

Donc la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre.

Ceci prouve H_{p+1}.

Par récurrence H_p est vrai pour tout $p \geqslant 2$.

2. Par l'absurde soient $x_1, \ldots, x_{n+2}$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que

$\forall i \neq j$, $\langle x_i, x_j \rangle < 0$.

Alors la famille $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ est libre.

C'est absurde car elle est formée de $n+1$ vecteurs et $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.