Urne avec N jetons numérotés :

$① \; ② \; \dots\dots \; ⓝ$ → $(1) (2) \dots (N)$

On en pioche n simultanément. On a $|\Omega| = \binom{N}{n}$

On note X le plus petit numéro obtenu et Y le plus grand.

1.(a) Loi de X

* Au minimum X peut prendre la valeur 1, par exemple si on pioche les jetons $(1)\,(2)\dots(n)$.

Au maximum X peut prendre la valeur $N-n+1$, dans le cas où on pioche les n plus grands numéros :

$(N)\;(N-1)\;\dots\;(N-n+1)$

Donc $\boxed{X(\Omega) = [\![1, N-n+1]\!]}$

* Soit $k \in [\![1, N-n+1]\!]$.

$(X=k) =$ " le plus petit n° pioché est k "

$=$ " on pioche le jeton k et $n-1$ jetons avec un numéro entre $k+1$ et N "

donc $\mathrm{Card}(X=k) = \binom{k-1}{0}\binom{1}{1}\binom{N-k}{n-1} = \binom{N-k}{n-1}$

Et donc $\boxed{\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{\binom{N-k}{n-1}}{\binom{N}{n}}}$

Rem: pour $n=1$ on trouve $X(\Omega)=[\![1,N]\!]$

et $\forall k \in [\![1,N]\!]$, $\mathbb{P}(X=k)=\dfrac{1}{N}$

ie $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,N]\!])$. Ce qui est cohérent.

1.(b) Loi de Y

* Au minimum Y peut prendre la valeur n, dans le cas où on pioche les n plus petits numéros :

(1) (2) ... (n)

Au maximum Y peut prendre la valeur N, par exemple si on pioche : (N-n+1) ... (N-1) (N)

Donc $\boxed{Y(\Omega)=[\![n,N]\!]}$

* Soit $k \in [\![n,N]\!]$.

$(Y=k)$ = "le plus grand numéro pioché est k"

= "on pioche $n-1$ jetons avec un numéro entre 1 et $k-1$ et le jeton k"

donc $\mathrm{Card}(Y=k)=\dbinom{k-1}{n-1}\dbinom{1}{1}\dbinom{N-k}{0}=\dbinom{k-1}{n-1}$

Et donc $\boxed{\mathbb{P}(Y=k)=\dfrac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}}$

Rem: pour $n=1$ on trouve $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,N]\!])$ ce qui est cohérent.

2. Soit $(i,j) \in [\![1, N-n+1]\!] \times [\![n, N]\!]$.

$(X=i)\cap(Y=j) =$ "on pioche le jeton i et le jeton j et $n-2$ jetons avec un numero entre $i+1$ et $j-1$"

donc $\mathrm{Card}\big((X=i)\cap(Y=j)\big) = \begin{cases} 0 & \text{si } n-2 > j-i-1 \\ \binom{1}{1}\binom{1}{1}\binom{j-i-1}{n-2} & \text{sinon} \end{cases}$

donc $\boxed{\mathbb{P}\big((X=i)\cap(Y=j)\big) = \begin{cases} 0 & \text{si } j-i \leqslant n-2 \\ \dfrac{\binom{j-i-1}{n-2}}{\binom{N}{n}} & \text{si } j-i > n-2 \end{cases}}$