TD4

1. $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

$\dfrac{1+x}{1-x}$ est défini ssi $x \neq 1$

Ensuite $f(x)$ est défini ssi $-1 \leq \dfrac{1+x}{1-x} \leq 1$

Or $-1 \leq \dfrac{1+x}{1-x} \iff 0 \leq 1 + \dfrac{1+x}{1-x} \iff 0 \leq \dfrac{2}{1-x}$

$\iff 1 - x \geq 0 \iff 1 \geq x$

Et $\dfrac{1+x}{1-x} \leq 1 \iff 0 \leq 1 - \dfrac{1+x}{1-x} \iff 0 \leq \dfrac{-2x}{1-x}$

On utilise un tableau de signes

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$-2x$		$+$	0	$-$		$-$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{-2x}{1-x}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Donc $\dfrac{1+x}{1-x} \leq 1 \iff x \leq 0$ ou $x > 1$

Donc $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^-}$

f est continue sur $\mathbb{R}^-$ comme composée de fonctions continues.

D'après les calculs précédents $\dfrac{1+x}{1-x} = \pm 1 \iff x = 0$

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*_-$ comme composée de fonctions dérivables.

$$\forall x<0,\ f'(x) = \frac{\frac{1-x-(1+x)\times(-1)}{(1-x)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}} = \frac{2}{(1-x)^2}\times\frac{|1-x|}{\sqrt{-4x}}$$

$$\boxed{\forall x<0,\ f'(x) = \frac{1}{(1-x)\sqrt{|x|}}}$$

car $x<0$ donc $1-x>0$
donc $|1-x| = 1-x$

2. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-\arcsin x}{1+\arcsin x}}$

$\arcsin x$ est défini ssi $-1 \leq x \leq 1$.

Ensuite $\dfrac{1-\arcsin x}{1+\arcsin x}$ est défini ssi $\arcsin x \neq -1$
ssi $x \neq \sin(-1)$

Si on pose $\alpha = \sin(1)$. $\alpha \in]0,1[$ car $1 \in]0, \frac{\pi}{2}[$

alors $\dfrac{1-\arcsin x}{1+\arcsin x}$ est défini pour $x \in [-1,1] \setminus \{\alpha\}$

Par fini $\sqrt{\dfrac{1-\arcsin x}{1+\arcsin x}}$ est alors défini si $\dfrac{1-\arcsin x}{1+\arcsin x} \geq 0$

On utilise ici aussi un tableau de signes.

x	-1	$-\alpha$		α	1
$1-\arcsin x$	$+$		$+$	0	$-$
$1+\arcsin x$	$-$	0	$+$		$+$
$\dfrac{1-\arcsin x}{1+\arcsin x}$	$-$	$\Vert$	$+$		$-$

Donc finalement $\boxed{D_f =]-\alpha, \alpha]}$

arcsin est dérivable sur $]-1,1[$.

Comme $0<\alpha<1$, $x \longmapsto \dfrac{1-\arcsin x}{1+\arcsin x}$ est dérivable sur $]-\alpha,\alpha]$

De plus $\sqrt{\cdot}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction précédente s'annule en α.

Donc f est dérivable sur $]-\alpha,\alpha[$.

$$\forall x \in]-\alpha,\alpha[, \quad f'(x) = \frac{\dfrac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(1+\cancel{\arcsin x}) - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(1-\cancel{\arcsin x})}{(1+\arcsin x)^2}}{2\sqrt{\dfrac{1-\arcsin x}{1+\arcsin x}}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\arcsin x}{1-\arcsin x}} \times \frac{1}{(1+\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$$

$$\boxed{\forall x \in]-\alpha,\alpha[, \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \times \sqrt{1-\arcsin x}\,(1+\arcsin x)^{3/2}}}$$

3) $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$ $\qquad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

f est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$$

où $u(x) = \frac{1}{1+x^2}$ donc $u'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2+1} = \frac{-2x}{x^4+2x^2+2}$$

4) $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}\right)$

$$x \in \mathcal{D}_f \iff 1+\sin x \neq 0 \text{ et } \frac{1-\sin x}{1+\sin x} \geq 0$$

tjs vrai

$$\iff \sin x \neq -1$$

$$\iff x \neq -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

donc $\mathcal{D}f = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$

Par opérations sur les fonctions continues, f est <u>continue</u> sur $\mathcal{D}f$.

$\sqrt{\cdot}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ mais dérivable seulement sur $\mathbb{R}_+^*$ et $1 - \sin x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} [2\pi]$

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$ et :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$$

où $u(x) = \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$ donc $1 + u(x)^2 = \frac{2}{1+\sin x}$

et $u'(x) = \frac{v'(x)}{2\sqrt{v(x)}}$ où $v(x) = \frac{1-\sin x}{1+\sin x} = \frac{2}{1+\sin x} - 1$

donc $v'(x) = -\frac{2\cos x}{(1+\sin x)^2}$

$$\text{Donc } f'(x) = -\frac{2\cos x}{(1+\sin x)^2} \times \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} \times \frac{1+\sin x}{2}$$

$$= -\frac{\cos x}{2\sqrt{1-\sin^2 x}} = -\frac{\cos x}{2|\cos x|}$$

<u>Remarque</u> : sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ on a $\cos \geqslant 0$

donc $f'(x) = -\frac{1}{2}$

Donc $\exists C \in \mathbb{R}$; $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $f(x) = -\frac{x}{2} + C$

Or $f(0) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} = C$

Donc $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}\right) = \frac{\pi - 2x}{4}$

Sur les autres intervalles, on trouve des formules différentes.