TD 5

1.a Les primitives de $x \mapsto xe^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$ sont toutes les fonctions de la forme $\boxed{x \mapsto \frac{1}{2}e^{x^2} + C}$

où $C \in \mathbb{R}$.

1.b) Les primitives de $x \mapsto \frac{x^2}{1+x^3}$ sur les intervalles $]-\infty, -1[$ ou $]-1, +\infty[$ sont toutes les fonctions de la forme $\boxed{x \mapsto \frac{1}{3}\ln(|1+x^3|) + C}$ où $C \in \mathbb{R}$.

rem si $x \in]-1, +\infty[$, $\ln(|1+x^3|) = \ln(1+x^3)$

si $x \in]-\infty, -1[$, $\ln(|1+x^3|) = \ln(-1-x^3)$

1.c) Les primitives de $x \mapsto \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x} \times \ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont toutes les fonctions de la forme $\boxed{x \mapsto \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C}$

où $C \in \mathbb{R}$.

1.d) Les primitives de $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ sur $\mathbb{R}$ sont toutes les fonctions de la forme $\boxed{x \mapsto \sqrt{1+x^2} + C}$ où $C \in \mathbb{R}$

1.e) Les primitives de $x \mapsto \cos(x) \times \sin(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$ sur $\mathbb{R}$ sont toutes les fonctions de la forme $\boxed{x \mapsto \frac{-1}{4}\cos(2x) + C}$

où $C \in \mathbb{R}$.

1.f) Les primitives de $x \longmapsto \dfrac{1}{x\ln x} = \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont toutes les fonctions de la forme $\boxed{x \longmapsto \ln(|\ln x|) + C}$

où $C \in \mathbb{R}$.

1.g) Les primitives de $x \longmapsto \dfrac{x}{1+x^4} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2x}{1+(x^2)^2}$ sur $\mathbb{R}$

sont toutes les fonctions de la forme $\boxed{x \longmapsto \dfrac{1}{2}\arctan(x^2) + C}$

où $C \in \mathbb{R}$.

1.h) Les primitives de $x \longmapsto \tan(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ sur un intervalle

$\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$ (où $k \in \mathbb{Z}$) sont toutes les fonctions

de la forme $\boxed{x \longmapsto -\ln(|\cos x|) + C}$ où $C \in \mathbb{R}$.

2.a) Une primitive de $x \mapsto \ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto F(x) = \int_1^x \ln t \, dt$ d'après le théorème fondamental de l'analyse.

Par IPP : $F(x) = \int_1^x \underbrace{1 \times \ln t}_{f'(t) \times g(t)} \, dt = \left[t \ln t \right]_{t=1}^{t=x} - \int_1^x t \frac{1}{t} \, dt$

$= x \ln x - x + 1$

L'IPP est licite car $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto \ln x$ sont C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

Les primitives de $x \mapsto \ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont donc toutes les fonctions de la forme $\boxed{x \mapsto x \ln x - x + C}$ où $C \in \mathbb{R}$.

2.b) De même une primitive de $x \mapsto x \arctan(x)$ sur $\mathbb{R}$ est $x \xmapsto{F} \int_0^x t \arctan t \, dt \underset{IPP}{=} \left[\frac{t^2}{2} \arctan t \right]_{t=0}^{t=x} - \int_0^x \frac{t^2}{2} \times \frac{1}{1+t^2} \, dt$

$= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} \, dt$

$= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t^2} \right) dt$

$= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \left(x - \arctan(x) - 0 \right)$

Donc les primitives de $x \mapsto x \arctan(x)$ sur $\mathbb{R}$ sont toutes les fonctions de la forme $\boxed{x \mapsto \frac{x^2+1}{2} \arctan(x) - \frac{x}{2} + C}$ où $C \in \mathbb{R}$

2.c) De même une primitive de $x \mapsto (x^2-x+1)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto F(x) = \int_0^x (t^2-t+1)e^{-t}\,dt$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) \underset{IPP}{=} \Big[(t^2-t+1)(-e^{-t})\Big]_0^x - \int_0^x (2t-1)(-e^{-t})\,dt$$

$$= -(x^2-x+1)e^{-x} + 1 + \int_0^x (2t-1)e^{-t}\,dt$$

$$\int_0^x (2t-1)e^{-t}\,dt \underset{IPP}{=} \Big[(2t-1)(-e^{-t})\Big]_0^x - \int_0^x 2(-e^{-t})\,dt$$

$$= -(2x-1)e^{-x} - 1 + 2\int_0^x e^{-t}\,dt$$

$$= -(2x-1)e^{-x} - 1 + 2(-e^{-x}+1)$$

$$= -(2x+1)e^{-x} + 1$$

donc $F(x) = -(x^2-x+1)e^{-x} + 1 - (2x+1)e^{-x} + 1$

$$= (-x^2-x-2)e^{-x} + 2$$

Donc les primitives de $x \mapsto (x^2-x+1)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$ sont toutes les fonctions de la forme $\boxed{x \mapsto -(x^2+x+2)e^{-x} + C}$ où $C \in \mathbb{R}$.

2.d) De même une primitive de $x \longmapsto (x-1)\sin x$ sur $\mathbb{R}$ est $x \longmapsto F(x) = \int_0^x (t-1)\sin t \, dt$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) \underset{IPP}{=} \Big[(t-1)(-\cos t)\Big]_0^x - \int_0^x 1 \times (-\cos t)\,dt$$

$$= -(x-1)\cos x - 1 + (\sin x - 0)$$

Donc les primitives de $x \longmapsto (x-1)\sin x$ sur $\mathbb{R}$ sont toutes les fonctions de la forme $\boxed{x \longmapsto (1-x) \times \cos x + \sin x + C}$ où $C \in \mathbb{R}$.

2.e) De même une primitive de $x \longmapsto (x+1)\operatorname{ch} x$ sur $\mathbb{R}$ est $x \longmapsto F(x) = \int_0^x (t+1)\operatorname{ch} t \, dt$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) \underset{IPP}{=} \Big[(t+1)\operatorname{sh} t\Big]_0^x - \int_0^x 1 \times \operatorname{sh} t \, dt$$

$$= (x+1)\operatorname{sh} x - (\operatorname{ch} x - 1)$$

Donc les primitives de $x \longmapsto (x+1)\operatorname{ch} x$ sur $\mathbb{R}$ sont toutes les fonctions de la forme $\boxed{x \longmapsto (x+1)\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x + C}$ où $C \in \mathbb{R}$.

2. f) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(x)^3 = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3$

$$= -\frac{1}{8}\left(e^{i3x} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{i3x}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\sin(3x) - 3\sin(x)\right)$$

De même une primitive de $x \longmapsto x\sin^3(x)$ sur $\mathbb{R}$ est

$x \longmapsto F(x) = \int_0^x t\sin^3(t)\,dt$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x t\sin^3(t)\,dt = \int_0^x \frac{t}{4}\left(3\sin t - \sin(3t)\right)dt$

$$\underset{IPP}{=} \left[\frac{t}{4}\left(-3\cos t + \frac{1}{3}\cos(3t)\right)\right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{4}\left(-3\cos t + \frac{1}{3}\cos(3t)\right)dt$$

$$= \frac{x}{4}\left(\frac{1}{3}\cos(3x) - 3\cos(x)\right) - 0 + \frac{1}{4}\int_0^x \left(3\cos t - \frac{1}{3}\cos(3t)\right)dt$$

$$= \frac{x}{12}\left(\cos(3x) - 9\cos(x)\right) + \frac{1}{4}\left[3\sin t - \frac{1}{9}\sin(3t)\right]_0^x$$

$$= \frac{x}{12}\left(\cos(3x) - 9\cos(x)\right) + \frac{1}{4}\left(3\sin x - \frac{1}{9}\sin(3x) - 0\right)$$

Donc les primitives de $x \longmapsto x\sin^3(x)$ sur $\mathbb{R}$ sont toutes les fonctions de la forme

$$\boxed{x \longmapsto \frac{x}{12}\left(\cos(3x) - 9\cos(x)\right) + \frac{1}{36}\left(27\sin(x) - \sin(3x)\right) + C}$$

où $C \in \mathbb{R}$.

3.a) Une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est

$F : x \longmapsto \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}$ d'après le théorème fondamental de l'analyse.

On fixe $x \in \mathbb{R}_+^*$ et on pose $u = \sqrt{t}$ ie $t = u^2 = \varphi(u)$

u	t
1	1
$\sqrt{x}$	x

φ est C^1 sur $[1, x]$ car C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$

et $dt = \varphi'(u)\,du = 2u\,du$

Donc $F(x) = \displaystyle\int_1^{\sqrt{x}} \frac{2u\,du}{u+u^3} = 2\int_1^{\sqrt{x}} \frac{du}{1+u^2} = 2\left(\arctan\sqrt{x} - \frac{\pi}{4}\right)$

Donc les primitives de $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}$ sont toutes les fonctions

de la forme $\boxed{x \longmapsto 2\arctan(\sqrt{x}) + C}$ où $C \in \mathbb{R}$.

3.b) De même une primitive de $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x + x(\ln x)^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

est $F : x \longmapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t + t(\ln t)^2}\,dt$

En posant $z = \ln t$ on a $t = e^z$ donc

$F(x) = \displaystyle\int_0^{\ln x} \frac{z}{e^z + z^2 e^z} e^z\,dz = \int_0^{\ln x} \frac{z}{1+z^2}\,dz = \left[\frac{1}{2}\ln(1+z^2)\right]_0^{\ln x}$

$= \dfrac{1}{2}\ln\left(1 + (\ln x)^2\right)$

Donc les primitives de $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x[1+\ln^2 x]}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont toutes les

fonctions de la forme $\boxed{x \longmapsto \frac{1}{2}\ln\left(1+(\ln x)^2\right) + C}$ où $C \in \mathbb{R}$

3.c) De même une primitive de $x \mapsto \dfrac{e^{2x}}{e^x+1}$ sur $\mathbb{R}$ est

$$F : x \mapsto \int_0^x \frac{e^{2t}}{e^t+1}\,dt.$$

Si on pose $y = e^t$ ie $t = \ln y$ alors :

$$F(x) = \int_1^{e^x} \frac{y^2}{y+1}\,\frac{1}{y}\,dy = \int_1^{e^x} \frac{y}{y+1}\,dy = \int_1 \left(1 - \frac{1}{1+y}\right) dy$$

$$= \Big[y - \ln(|1+y|) \Big]_1^{e^x} = e^x - \ln(1+e^x) - 1 + 0$$

Donc les primitives de $x \mapsto \dfrac{e^{2x}}{e^x+1}$ sur $\mathbb{R}$ sont toutes les fonctions de la forme $\boxed{x \mapsto e^x - \ln(1+e^x) + C}$ où $C \in \mathbb{R}$

3.d) De même une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ sur $]1, +\infty[$ est

$$F : x \mapsto \int_2^x \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$$

Si on pose $w = \dfrac{1}{t}$ ie $t = \dfrac{1}{w}$ alors :

$$F(x) = \int_{1/2}^{1/x} \frac{1}{\frac{1}{w}\sqrt{\frac{1}{w^2}-1}} \times \frac{-1}{w^2}\,dw = -\int_{1/2}^{1/x} \frac{1}{\sqrt{1-w^2}}\,dw$$

$$= \Big[\arccos w \Big]_{1/2}^{1/x} = \arccos\frac{1}{x} - \arccos\frac{1}{2}$$

Donc les primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ sur $]1, +\infty[$ sont toutes les fonctions de la forme $\boxed{x \mapsto \arccos\left(\frac{1}{x}\right) + C}$ où $C \in \mathbb{R}$.