Analyse : On suppose f continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \sin t + 2 \times \int_0^t e^{t-x} f(x)\,dx$ (1)

On a supposé f continue sur $\mathbb{R}$.

Par produit de fonctions continues, la fonction $t \longmapsto e^{-t} \cdot f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème fondamental de l'analyse, φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t) = e^{-t} \cdot f(t)$

On a $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \sin(t) + 2e^{t} \times \varphi(t)$

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit de fonctions dérivables.

On a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad f'(t) = \cos(t) + 2e^{t} \cdot \varphi'(t) + 2e^{t} \cdot \varphi(t)$$
$$= \cos(t) + 2f(t) + 2e^{t} \cdot \varphi(t)$$

Mais $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \sin t + 2e^{t} \cdot \varphi(t)$

donne $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \frac{1}{2} e^{-t} \times (f(t) - \sin t)$

En injectant ci-dessus : $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) - 3 \cdot f(t) = \cos t - \sin t$

(2)

On résout l'équation différentielle :

$$y' - 3y = \cos t - \sin t$$

équation homogène : $y' - 3y = 0$

les solutions sont les fonctions $t \mapsto Ce^{3t}$ où $C \in \mathbb{R}$

solution particulière de $y' - 3y = \cos t - \sin t$:

on cherche y sous la forme $y(t) = C(t) \cdot e^{3t}$

où C fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a $\forall t \in \mathbb{R}$, $C'(t) \cdot e^{3t} + 0 = \cos t - \sin t$

$$C'(t) = e^{-3t} \times (\cos t - \sin t)$$

Une primitive de $t \mapsto e^{(-3+i)t}$ est $t \mapsto \frac{1}{-3+i} e^{(-3+i)t}$

donc $t \longmapsto \frac{-3-i}{10} e^{(-3+i)t}$

En prenant les parties réelles et imaginaires, on trouve que $t \longmapsto \left(\frac{-3}{10} \cos t + \frac{1}{10} \sin t\right) e^{-3t}$ est une primitive de $t \longmapsto e^{-3t} \times \cos t$ et que

$t \longmapsto \left(-\frac{3}{10} \sin t - \frac{1}{10} \cos t\right) e^{-3t}$ est une primitive de $t \mapsto e^{-3t} \cdot \sin t$

Par soustraction : ③

$t \mapsto \left(-\frac{2}{10}\cos t + \frac{2}{5}\sin t\right)e^{-3t}$ est une primitive de

$t \mapsto e^{-3t}(\cos t - \sin t)$

On trouve que $y : t \mapsto -\frac{2}{10}\cos t + \frac{2}{5}\sin t$ est solution particulière.

Les solutions sont donc les fonctions

$$t \mapsto Ce^{3t} - \frac{2}{10}\cos t + \frac{2}{5}\sin t \quad \text{où } C \in \mathbb{R}.$$

Donc $\boxed{\exists C \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = Ce^{3t} - \frac{2}{10}\cos t + \frac{2}{5}\sin t}$

On a montré que si f est solution alors f est de la forme ci-dessus.

Synthèse

On se donne $C \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = Ce^{3t} - \frac{2}{10}\cos t + \frac{2}{5}\sin t$$

④

Pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\int_0^t e^{-x}e^{ix}\,dx = \int_0^t e^{(i-1)x}\,dx$

$$= \left[\frac{1}{i-1}e^{(i-1)x}\right]_{x=0}^{x=t}$$

$$= \frac{1}{i-1}\left(e^{(i-1)t} - 1\right)$$

$$= \frac{-1-i}{2}\left(e^{(i-1)t} - 1\right)$$

En prenant parties réelles et imaginaires :

$$\int_0^t e^{-x}\cos x\,dx = \left(-\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t\right)e^{-t} + \frac{1}{2}$$

et $$\int_0^t e^{-x}\sin x\,dx = \left(-\frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t\right)e^{-t} + \frac{1}{2}$$

donc $$\int_0^t e^{-x} f(x)\,dx = C\int_0^t e^{2x}\,dx - \frac{2}{10}\int_0^t e^{-x}\cos x\,dx + \frac{2}{5}\int_0^t e^{-x}\sin x\,dx$$

$$= \frac{C}{2}\left(e^{2t} - 1\right) + \left(\frac{1}{10}\cos t - \frac{3}{10}\sin t\right)e^{-t} + \frac{1}{10}$$

Donc $\sin t + 2e^{t}\displaystyle\int_0^t e^{-x}f(x)\,dx = Ce^{3t} - Ce^{t} + \frac{2}{10}e^{t} - \frac{2}{10}\cos t + \frac{2}{5}\sin t$

5

Donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sin t + 2 \cdot \int_0^t e^{t-x} \cdot f(x)\,dx = f(t) + \left(\frac{2}{10} - C\right)e^t$

On voit que : f est solution $\Longleftrightarrow C = \frac{2}{10}$

Conclusion

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{L'équation } (\ast) \text{ a donc une \underline{unique} solution :} \\ f : t \longmapsto \frac{2}{10}e^{3t} - \frac{2}{10}\cos t + \frac{2}{5}\sin t\end{array}}$$