Analyse On suppose que y est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation $t^2y'' - ty' + y = 0$. ①

On pose $\forall t > 0$, $z(t) = \frac{y(t)}{t} = \frac{1}{t} \times y(t)$

Alors z est 2 fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ tout comme y.

On a $\forall t > 0$, $y(t) = t \times z(t)$

donc $\forall t > 0$, $y'(t) = t \times z'(t) + z(t)$

et $\forall t > 0$, $y''(t) = t \times z''(t) + 2z'(t)$

On a supposé $\forall t > 0$, $t^2 \times y''(t) - t \times y'(t) + y(t) = 0$

donc $\forall t > 0$, $t^3 \times z''(t) + 2t^2 \times z'(t) - t^2 \times z'(t) - t \times z(t) + t \times z(t) = 0$

donc $\forall t > 0$, $t^3 \times z''(t) + t^2 \times z'(t) = 0$

donc $\forall t > 0$, $z''(t) + \frac{1}{t} \times z'(t) = 0$

Donc z' est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de $y' + \frac{1}{t} y = 0$.

Il existe donc un réel C tel que $\forall t > 0$, $z'(t) = Ce^{-\ln t}$
$= \frac{C}{t}$

Il existe donc un autre réel D tel que $\forall t > 0$, $z(t) = C\ln t + D$

Alors $\forall t > 0$, $y(t) = t \times z(t) = Ct.\ln t + D.t$

Synthèse On se donne deux réels C et D.

On pose $\forall t>0,\ y(t) = C t.\ln t + D.t$

En reprenant à l'envers les calculs précédents on voit que y est 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall t>0,\quad t^2 \times y''(t) - t \times y'(t) + y(t) = 0$$

Conclusion Les solutions sont toutes les fonctions de la forme

$$t \longmapsto C.t.\ln t + D.t$$

où C et D sont des réels qcq.