TD6 Ex 12

1. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

On note $f_n : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction d'expression

$$f_n(x) = x^n + x - 1.$$

f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0,\ f_n'(x) = nx^{n-1} + 1 > 0$

$$\begin{array}{c|ccccc} x & 0 & & x_n & & +\infty \\ \hline & & & & & +\infty \\ f_n & & & 0 & \nearrow & \\ & -1 & \nearrow & & & \end{array}$$

f_n est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

D'après le théorème de la bijection monotone, f_n est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ vers $f_n(\mathbb{R}_+^*) =]-1,+\infty[$.

Or $0 \in]-1,+\infty[$ donc $\exists!\, x_n \in \mathbb{R}_+^*,\ f_n(x_n) = 0$

ie $\boxed{\exists!\, x_n > 0,\quad x_n^n + x_n - 1 = 0}$

2. $f_n(1) = 1 > 0 = f_n(x_n)$

Comme f_n strictement croissante : $1 > x_n$.

Donc $\boxed{(x_n) \text{ est majorée par } 1.}$

3. $f_n(x_{n+1}) = x_{n+1}^n + x_{n+1} - 1$

Mais $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0 = x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1} - 1$

Donc $f_n(x_{n+1}) = x_{n+1}^n - x_{n+1}^{n+1} = \underbrace{x_{n+1}^n}_{>0} \times \underbrace{(1 - x_{n+1})}_{>0}$ ②

donc $f_n(x_{n+1}) > 0 = f_n(x_n)$

Comme f_n est strictement croissante : $x_{n+1} > x_n$.

Donc $\boxed{(x_n) \text{ est croissante.}}$

4. Par l'absurde on suppose que (x_n) converge vers un réel l tel que $l < 1$.

Comme (x_n) est croissante : $\forall n \geq 1,\ x_n \geq x_1 > 0$

Par prolongement des inégalités : $l \geq x_1$ donc $l > 0$

Ainsi par composée : $\ln(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ln(l)$

Par produit : $n \times \ln(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} (+\infty) \times \underbrace{\ln(l)}_{<0} = -\infty$

Mais $e^x \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$

donc par composée : $x_n^n = e^{n \cdot \ln(x_n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Par somme : $\underbrace{x_n^n + x_n - 1}_{=0} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 + l - 1$

Par unicité de la limite : $0 = l - 1$ donc $l = 1$

c'est absurde car $l < 1$.

5. On sait que (x_n) est croissante et majorée par 1. D'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel $l \leq 1$.

Mais d'après la question précédente : $l \geq 1$.

Donc $l = 1$.

Ainsi $\boxed{x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1}$