TD6 exe 4

① Pour $x > 0$: $x + \frac{1}{x} \geqslant 2 \iff x^2 + 1 \geqslant 2x$

$\iff (x-1)^2 \geqslant$

② $(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \times \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right)$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{a_i}{a_j}\right)$$

$$= \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \frac{a_i}{a_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{a_i}{a_j} + \sum_{1 \leq j < i \leq n} \frac{a_i}{a_j}$$

Dans la troisième somme on pose $i' = j$ et $j' = i$.

$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \times \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right)$

$$= n + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \underbrace{\left(\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i}\right)}_{\geqslant 2} \geqslant n + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2 = n + 2 \times \frac{n(n-1)}{2} = n^2$$