TD6 Ex 8

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_1 + \dots + u_n + u_{n+1}}{n+1} - \frac{u_1 + \dots + u_n}{n} = \frac{n u_{n+1} - (u_1 + \dots + u_n)}{n(n+1)}$$

Mais $(u_n) \nearrow$ donc : $u_1 \leqslant u_{n+1}$, $u_2 \leqslant u_{n+1}$, ..., $u_n \leqslant u_{n+1}$

Par somme d'inégalités : $u_1 + \dots + u_n \leqslant n.u_{n+1}$

et donc $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$

Ainsi $\boxed{(v_n)_{n\geq 1} \text{ est une suite croissante}}$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_{2n} = \frac{(u_1 + \dots + u_n) + (u_{n+1} + \dots + u_{2n})}{2n}$$

D'une part $u_1 + \dots + u_n = n.v_n$

D'autre part comme $(u_n)_n$ est croissante :

$$u_{n+1} + \dots + u_{2n} \geqslant \underbrace{u_n + \dots + u_n}_{n \text{ fois}} = n u_n$$

Donc par somme d'inégalités : $\boxed{v_{2n} \geqslant \frac{u_n + v_n}{2}}$

3. Comme (u_n) est croissante de limite $l \in \mathbb{R}$ on sait que :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant l$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a donc : $u_1 + \dots + u_n \leqslant n.l$

et donc : $v_n \leqslant l$.

Ainsi $(v_n)_{n \geqslant 1}$ est croissante majorée par l. D'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel $L \leqslant l$.

Par théorème des suites extraites : $v_{2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} L$

Par somme de limites : $\frac{u_n + v_n}{2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{l + L}{2}$

Par prolongement de l'inégalité du 2. on a : $L \geqslant \frac{l+L}{2}$

ie $L \geqslant l$.

On peut donc conclure que $L = l$ ie $\boxed{v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l.}$