Exc 10

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$(A - I_3) \times (A + 2I_3) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = O_3$$

donc $A^2 + A - 2I_3 = O_3$

donc $A \times \frac{1}{2}(A + I_3) = O_3$

donc A est inversible et $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$

2. $B = \frac{1}{3}(I_3 - A)$ donc $B^2 = \frac{1}{9}(I_3 - 2A + A^2) = \frac{1}{9}(3I_3 - 3A)$

$$B^2 = B$$

Ainsi $B^0 = I_3$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B^n = B$

De même $C^2 = C$ donc $C^0 = I_3$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ C^n = C$

3. $A = C - 2B$ et $BC = CB = O_3$

donc d'après la formule du binôme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-2)^k \underbrace{B^k C^{n-k}}_{= BC \text{ si } k \neq 0 \text{ et } k \neq n}$$

$$\forall n \geq 2,\ A^n = \binom{n}{0}(-2)^0 B^0 C^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k}(-2)^k BC + \binom{n}{n}(-2)^n B^n C^0$$

$$= \underset{\overset{\parallel}{C}}{C^n} + \left[\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k}(-2)^k\right] \underset{\overset{\parallel}{O_3}}{BC} + (-2)^n . \underset{\overset{\parallel}{B}}{B^n}$$

Donc $\forall n \geq 2,\ A^n = C + (-2)^n B$

c'est vrai pour $n = 1$

et pour $n = 0$ car $B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = C + (-2)^n . B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2+(-2)^n & 1-(-2)^n & -1+(-2)^n \\ 1-(-2)^n & 2-(-2)^n & 1-(-2)^n \\ -1+(-2)^n & 1-(-2)^n & 2-(-2)^n \end{pmatrix}}$