1) $(S)\begin{cases} 3x - y + \boxed{z} = 5 \\ 2x + y - z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ 4x + y + z = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} \boxed{z} - y + 3x = 5 \\ -z + y + 2x = 1 \\ z - y + x = 2 \\ z + y + 4x = 3 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} \boxed{z} - y + 3x = 5 & \\ 5x = 6 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ -2x = -3 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ 2y + x = -2 & L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{cases}$$

L_2 et L_3 donnent déjà que (S) est incompatible

$$(S) \underset{L_2 \leftrightarrow L_4}{\iff} \begin{cases} \boxed{z} - y + 3x = 5 \\ \boxed{2y} + x = -2 \\ \boxed{-2x} = -3 \\ 5x = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} \boxed{z} - y + 3x = 5 \\ \boxed{2y} + x = -2 \\ \boxed{-2x} = -3 \\ 0 = -3 \end{cases}$$

$L_4 \leftarrow 2L_4 + 5L_3$

ce système est <u>échelonné</u>. Il est de rang 3 donc <u>rg (S) = 3</u>. Les inconnues principales sont x, y et z. Il n'y a pas de paramètre.

$$\mathcal{S} = \emptyset$$

2) $(S)\begin{cases} 2x+y\boxed{-z}=1 \\ 3x+3y-z=2 \\ 2x+4y=2 \end{cases} \iff \begin{cases} \boxed{-z}+y+2x=1 \\ -z+3y+3x=2 \\ 4y+2x=2 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \boxed{-z}+y+2x=1 \\ \boxed{2y}+x=1 & L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ 4y+2x=2 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \boxed{-z}+y+2x=1 \\ \boxed{2y}+x=1 \\ 0=0 & L_3 \leftarrow L_3-2L_2 \end{cases}$

Le système est échelonné, de rang 2 et compatible.

Donc $\underline{rg(S)=2}$ et (S) est $\underline{\text{compatible}}$.

Les inconnues principales sont y et z. x est un paramètre et il y a une infinité de solutions.

$(S) \iff \begin{cases} x \text{ qcq dans } \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}) \\ y = \frac{1}{2}(1-x) \\ z = \frac{1}{2}(3x-1) \end{cases}$

$\mathcal{S} = \left\{ \left(x, \frac{1-x}{2}, \frac{3x-1}{2}\right) \in \mathbb{R}^3 ; \ x \in \mathbb{R} \right\}$

3) (S) $\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ \boxed{x}-y-z=2 \\ 4x-y-z=3 \end{cases} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \boxed{x}-y-z=2 \\ 2x+y+z=1 \\ 4x-y-z=3 \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} \boxed{x}-y-z=2 \\ \boxed{y}+z=-1 & L_2 \leftarrow (L_2-2L_1)\frac{1}{3} \\ 3y+3z=-5 & L_3 \leftarrow (L_3-4L_1) \end{cases}$

A l'aide de L_2 et L_3 on voit que (S) est <u>incompatible</u>

$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} \boxed{x}-y-z=2 \\ \boxed{y}+z=-1 \\ 0=-2 & L_3 \leftarrow L_3-3L_2 \end{cases}$

Le système est échelonné, de rang 2.

Donc <u>$rg(S)=2$</u>. Les inconnues principales sont x et y.

z est un paramètre.

$\mathcal{S}=\emptyset$

4) $(S)\begin{cases} x+y+z-t=1 \\ x-y-z+t=2 \\ x-y-z-t=3 \end{cases}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+y+z-t=1 \\ -2y-2z+2t=1 & L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ -2y-2z=2 & L_3 \leftarrow L_3-L_1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x-t+y+z=1 \\ 2t-2y-2z=1 \\ -2y-2z=2 \end{cases}$$

Ce système est échelonné et de rang 3.

Donc $\underline{rg(S)=3}$. Les inconnues principales sont x, y et t. z est un paramètre et il y a une infinité de solutions

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 3/2 \\ y = -1-z \\ z \text{ qcq dans } \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}) \\ t = -1/2 \end{cases}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{3}{2}, -1-z, z, -\frac{1}{2}\right) \in \mathbb{R}^4 ; z \in \mathbb{R} \right\}$$

5) $(S)\begin{cases} 3x - y + z = 5 \\ \boxed{x} + y - z = -2 \\ -x + 2y + z = 3 \end{cases} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \boxed{x} + y - z = -2 \\ 3x - y + z = 5 \\ -x + 2y + z = 3 \end{cases}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} + y - z = -2 & \\ -4y + \boxed{4z} = 11 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ \boxed{3y} = 1 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} - z + y = -2 \\ \boxed{4z} - 4y = 11 \\ \boxed{3y} = 1 \end{cases}$$

Ce système est échelonné et de rang 3.

Donc $\underline{rg(S) = 3}$. x, y et z sont des inconnues principales.

Il n'y a pas de paramètre donc il y a une unique solution.

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 3/4 \\ y = 1/3 \\ z = \frac{37}{12} \end{cases}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{3}, \frac{37}{12} \right) \right\}$$

6) $(S)\begin{cases} \boxed{x_1} + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 & = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 \quad -4x_5 = 0 \end{cases}$

Comme (S) est homogène il est compatible.

$$(S) \iff \begin{cases} \boxed{x_1} + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ \boxed{x_2} + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ -3x_2 - 3x_3 - 6x_4 - 4x_5 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \boxed{x_1} + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ \boxed{x_2} + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ \boxed{-6x_4} + x_5 = 0 & L_3 \leftarrow (L_3 + 3L_2)\frac{1}{2} \end{cases}$$

Le système est échelonné de rang 3.

Donc $\underline{rg(S) = 3}$

Les inconnues principales sont x_1, x_2, x_4. x_3 et x_5 sont des paramètres. (S) a donc une infinité de solutions.

$$(S) \iff \begin{cases} x_1 = 3x_3 + \frac{17}{6}x_5 \\ x_2 = -x_3 - \frac{5}{3}x_5 \\ x_3 \text{ qcq ds } \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}) \\ x_4 = \frac{1}{6}x_5 \\ x_5 \text{ qcq ds } \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}) \end{cases}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(3x_3 + \frac{17}{6}x_5, -x_3 - \frac{5}{3}x_5, x_3, \frac{1}{6}x_5, x_5\right) \in \mathbb{R}^5 ; (x_3, x_5) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$